第十周作业答案

于俊骜

2024 年 5 月 20 日

习题 11.3

1

(1)

记

$$L_1 = \{(x,y)|y=x, 0 \le x \le 1\} \qquad L_1 = \{(x,y)|y=2-x, 1 \le x \le 2\}$$

于是

$$\begin{aligned}
&\int_{L_1} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2-y^2)\,\mathrm{d}y \\
=&\int_{L_1} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2-y^2)\,\mathrm{d}y + \int_{L_2} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2-y^2)\,\mathrm{d}y \\
=&\int_0^1 2x^2\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \left(x^2+(2-x)^2\right)\mathrm{d}x - \int_1^2 \left(x^2-(2-x)^2\right)\mathrm{d}x \\
=&\frac{2}{3} + \frac{16}{3} - \frac{14}{3} = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

(2)

由对称性

$$\int_L \frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|} = \int_L \mathrm{d}x + \mathrm{d}y = 0$$

(3)

令 $x = a\cos\theta, y = a\sin\theta$，则

$$\int_L \frac{-x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi} \left(a^2\cos\theta\sin\theta + a^2\sin\theta\cos\theta\right)\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \sin 2\theta = 0$$

(4)

依次将三条线段记为 L_1, L_2, L_3，则

$$\begin{aligned}\int_L y^2\,\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}y + xz\,\mathrm{d}z &= \int_{L_1} y^2\,\mathrm{d}x + \int_{L_2} xy\,\mathrm{d}y + \int_{L_3} xz\,\mathrm{d}z = \int_0^1 y^2\,\mathrm{d}x + \int_0^1 xy\,\mathrm{d}y + \int_0^1 xz\,\mathrm{d}z \\ &= \int_0^1 y\,\mathrm{d}y + \int_0^1 z\,\mathrm{d}z = 1\end{aligned}$$

(5)

令 $t = x + y + z$，则

$$\int_L e^{x+y+z}(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z) = \int_L e^{x+y+z}\,\mathrm{d}(x+y+z) = \int_1^{\frac{3}{2}} e^t\,\mathrm{d}t = e^{\frac{3}{2}} - e$$

2

$$\begin{aligned}\int_L \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_L (y+z)\,\mathrm{d}x + (z+x)\,\mathrm{d}y + (x+y)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_0^\pi \big((2a\sin t\cos t + a\cos^2 t)2a\sin t\cos t\big)\,\mathrm{d}t + \int_0^\pi 2a^2\cos 2t \\ &- \int_0^\pi \big((a\sin^2 + 2a\sin t\cos t)2a\sin t\cos t\big)\,\mathrm{d}t \\ &= a^2\int_0^\pi \left(\frac{1}{2}\sin 4t + 2\cos 2t\right)\mathrm{d}t \\ &= 0\end{aligned}$$

3

$$W = k\int_L x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = k(b^2 - a^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}k(b^2 - a^2)$$

4

(1)

对于

$$P = (x+y)^2 \qquad Q = x^2 - y^2$$

我们有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2(x+y) = -2y$$

因此，由 Green 公式

$$\oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = -2\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^3 \mathrm{d}y\int_y^{6-y} y\,\mathrm{d}x = \int_1^3 y(6-2y)\,\mathrm{d}y = \frac{20}{3}$$

(3)

对于

$$P = yx^3 + e^y \qquad Q = xy^3 + xe^y - 2y$$

我们有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y^3 + e^y - x^3 - e^y = y^3 - x^3$$

因此，由 Green 公式

$$\oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D (x^3 - y^3)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D x^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint_D y^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

最后一个等号来自对称性。

(4)

对于

$$P = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad Q = y\left(xy + \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)\right)$$

我们有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y^2 + \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = y^2$$

因此，由 Green 公式

$$\oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_D y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{1+y^2}^{2} y^2\,\mathrm{d}x = \frac{4}{15}$$

(5)

对于

$$P = x^2 + 2xy - y^2 \qquad Q = x^2 - 2xy + y^2$$

我们有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2y - 2x + 2y = 0$$

因此，由 Green 公式

$$\oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_{L'} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} y^2\,\mathrm{d}y = \frac{2}{3}$$

这里 L' 是从 $(0, -1)$ 到 $(0, 1)$ 的线段。

(6)

对于

$$P = e^x \sin y - my \qquad Q = e^x \cos y - m$$

我们有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = e^x \cos y - e^x \cos y + m = m$$

因此，由 Green 公式

$$\oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D m\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \int_{L'} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \frac{\pi m a^2}{4} - \int_0^a e^x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi m a^2}{4} - e^a + 1$$

5

(1)

由 Green 公式

$$S = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\oint_L -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(\sin^4 t\cos^2 t + \sin^2 t\cos^4 t\right)\mathrm{d}t = \frac{a^2}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi a^2}{8}$$

(2)

由 Green 公式

$$S = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\oint_L y\,\mathrm{d}x = -a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,\mathrm{d}t = a^2\int_0^{2\pi}\left(\cos^2 t - 2\cos t + 1\right)\mathrm{d}t = 3\pi a^2$$

6

(1)

$$\int_{L_1}\frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \int_\pi^0(\cos^2 t - \sin^2 t)\,\mathrm{d}t = -\pi$$

(2)

不难得到 $\mathbf{v} = -\frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j}$ 是 $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ 上任意单连通子集的保守场。注意到 (1) 中积分值与 a 无关，于是

$$\int_{L_2}\frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = -\pi - \int_1^3 0\,\mathrm{d}x = -\pi$$

习题 11.7

5

(1)

由题

$$u = \int(3x^2 + 6xy^2)\,\mathrm{d}x = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y)$$
$$u = \int(6x^2y - 4y^3)\,\mathrm{d}y = 3x^2y^2 - y^4 + \psi(x)$$

因此

$$u = x^3 + 3x^2y^2 - y^4 + C$$

6

(3)

对于

$$P = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad Q = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

我们有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

于是积分与路径无关。

我们取 $(1,0)$ 到 $(6,0)$ 再到 $(6,3)$ 的路径，则

$$\int_{(1,0)}^{(6,3)} \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_1^6 \mathrm{d}x + \int_0^3 \frac{y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2+36}} = 5 + \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t+36}} = \frac{3\sqrt{5}}{4} + \frac{7}{2}$$

问题反馈

- Green 公式千万别减反；
- 注意曲线的方向，有时容易漏负号；
- 只有保守场才能随便换路径，如果是局部保守，那也只能在局部换，尤其注意绕圈 $\pm 2\pi$ 的情况，乱绕肯定出错。