第十五周作业答案

于俊骜

2024 年 6 月 18 日

习题 13.2

1

(2)

$$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x+y)^\alpha} = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}y \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x+y)^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)^{\alpha-1}}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)}$$

(3)

由对称性

$$\begin{aligned}
\iint_D \max\{x,y\}e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{+\infty} \max\{r\cos\theta, r\sin\theta\}e^{-r^2} r\,\mathrm{d}r \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^{+\infty} r^2 e^{-r^2}\,\mathrm{d}r \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} r e^{-r^2}\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{+\infty} e^{-r^2}\,\mathrm{d}r \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{8}}
\end{aligned}$$

习题 13.3

1

(1)

不难得到，$f(x,\alpha) = \sqrt{x^2+\alpha^2}$ 在 $[-1,1]^2$ 上连续，从而

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{-1}^{1} \sqrt{x^2+\alpha^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} |x|\,\mathrm{d}x = 1$$

另一方面，直接计算可得

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{-1}^{1} \sqrt{x^2+\alpha^2}\,\mathrm{d}x = 2\lim_{\alpha\to 0}\int_0^1 \sqrt{x^2+\alpha^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{\alpha\to 0}\left(\sqrt{1+\alpha^2} + \alpha^2 \ln\left(\frac{x}{\alpha} + \sqrt{\frac{x^2}{\alpha^2}+1}\right)\right) = 1$$

(2)

不难得到，$f(x,\alpha)=\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}$ 在 $[-2,2]\times[-1,1]$ 上连续，从而

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$$

另一方面，直接计算可得

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}\,\mathrm{d}x=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{1+\alpha^2}\left(\arctan\frac{1+\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}-\arctan\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)=\frac{\pi}{4}$$

2

(1)

$$F'(\alpha)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=-e^{\alpha|\sin\alpha|}\sin\alpha-e^{\alpha|\cos\alpha|}\cos\alpha+\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

(3)

$$F'(\alpha)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\int_0^{\alpha}\frac{\ln(1+\alpha x)}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\ln(1+\alpha^2)}{\alpha}+\int_0^{\alpha}\frac{1}{1+\alpha x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\alpha}\ln\left(1+\alpha^2\right)$$

3

由题，我们可以直接对 y 求导得到

$$\begin{aligned}y'&=\int_c^x f(t)\cos k(x-t)\,\mathrm{d}t\\ y''&=f(x)-k\int_c^x f(t)\sin k(x-t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

代回原方程得证。

4

(1)

记积分式为 $I(b)$，则由被积函数的光滑性知

$$\begin{aligned}I'(b)&=\frac{\partial}{\partial b}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x\right)\mathrm{d}x\\ &=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2b\cos^2 x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x\\ &=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2b}{a^2\tan^2 x+b^2}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

令 $t=\tan x$，则

$$\begin{aligned}I'(b)&=\frac{2b}{a^2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+\frac{b^2}{a^2}}\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{2b}{b^2-a^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{t^2+1}-\frac{1}{t^2+\frac{b^2}{a^2}}\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{b}{b^2-a^2}\left(1-\frac{a}{b}\right)\pi\\&=\frac{\pi}{a+b}\end{aligned}$$

于是由微积分基本定理

$$I(b)=I(0)+\int_0^b I'(\beta)\,\mathrm{d}\beta=\pi\ln\frac{a+b}{2}$$

这是因为

$$I(0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(a^2\sin^2 x\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1}{2}\left(a^2\sin^2 x+a^2\cos^2 x\right)\mathrm{d}x=\pi\ln\frac{a}{2}$$

(2)

记积分式为 $I(a)$，则由被积函数的光滑性知

$$I'(a)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\int_0^{\pi}\ln\left(1-2a\cos x+a^2\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{a}+\frac{a^2-1}{a}\int_0^{\pi}\frac{1}{1-2a\cos x+a^2}\,\mathrm{d}x$$

这里令 $t=\tan\frac{x}{2}$，则

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1-2a\cos x+a^2}\,\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+a^2)(1+t^2)-2a(1-t^2)}\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^{+\infty}\frac{2}{(1+a)^2t^2+(1-a)^2}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{2}{1-a^2}\arctan\left(\frac{1+a}{1-a}t\right)\bigg|_{t=0}^{+\infty}\\&=\frac{\pi}{1-a^2}\end{aligned}$$

代回原式得到

$$I'(a)=0\Longrightarrow I(a)=I(0)=0$$

习题 13.4

1

(1)

由

$$\int_0^{+\infty}x^{\mu}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{\mu}\,\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}x^{\mu}\,\mathrm{d}x$$

前一项收敛域为 $(-1,+\infty)$，后一项收敛域为 $(-\infty,-1)$，得到该积分得收敛域为 $\varnothing$。

2

(1)

注意到
$$\left|\frac{\cos ux}{1+x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$$
而
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi$$
由 Weierstrass 判别法，该积分在 $(-\infty,+\infty)$ 一致收敛。

(3)

注意到 $\alpha=0$ 时该积分值 0。而 $\alpha>0$ 时，令 $t=\sqrt{a}x$，则
$$\int_0^{+\infty} \sqrt{\alpha}e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$
因此
$$\beta(A) = \sup_{\alpha\ge 0}\left|\int_A^{+\infty} \sqrt{\alpha}e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x\right| \ge \sup_{\alpha>0}\left|\int_A^{+\infty} \sqrt{\alpha}e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x\right| = \sup_{\alpha>0}\left|\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^{A} \sqrt{\alpha}e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x\right| = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$
最后一个等号来自于 $\alpha\to 0^+$。这说明该积分在 $\alpha\in[0,+\infty)$ 不一致收敛。

6

证明. 注意到
$$\left|\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\right| \le \frac{1}{1+x^2}$$
同理 **2(1)** 知 $F(\alpha)$ 在 $[0,+\infty)$ 一致收敛，从而连续。

进一步
$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2} = \frac{2(x+\alpha)\cos x}{(1+(x+\alpha)^2)^2}$$
这里
$$\left|\int_0^A \cos x\,\mathrm{d}x\right| \le 2$$
且 $\frac{2(x+\alpha)}{(1+(x+\alpha)^2)^2}$ 在 $x\to+\infty$ 时关于 α 一致趋于 0。由 Dirichlet 判别法，积分
$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\,\mathrm{d}x$$
一致收敛，从而 $F(\alpha)$ 可微。 □

7

(1)

$$\int_0^1 \frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x\int_\alpha^\beta x^y\,\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}y\int_0^1 x^y\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}y}{y+1} = \ln\frac{\beta+1}{\alpha+1}$$

8

(1)

令 $t=\frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma}$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-a}{\sigma})^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(a+\sqrt{2}\sigma t\right)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t=a+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-t^2}\,\mathrm{d}t=a$$

(2)

令 $t=\frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma}$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-a)^2}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-a}{\sigma})^2}\,\mathrm{d}x=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-t^2}\,\mathrm{d}t=-\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}te^{-t^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\sigma^2$$

(4)

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}=-\frac{\sin^2 x}{x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

(6)

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}&=-\frac{\sin^4 x}{x}\Big|_0^{+\infty}+4\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3 x\cos x}{x}\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x(1-\cos 2x)}{x}\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{+\infty}\left(\sin 2xx-\frac{\sin 4x}{2x}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

问题反馈

- Gauss 积分的值容易记差一个系数；
- 对含参积分求导，求出来的式子未必能积出来，若积不出来可以留着；
- 加强初等积分计算的熟练度和准确性；
- 看清题目所给的参数范围；
- 换元时，新元要良定，起码不能恒为 0；
- 不一致收敛基本是用 β 判定的。