第十三周作业答案

于俊骜

2024 年 5 月 28 日

习题 12.1

2

(2)

直接计算可得

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{T}{3} \\
a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{2n\pi}{T}\,\mathrm{d}x = 0 \\
b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\frac{2n\pi}{T}\,\mathrm{d}x = -\frac{T}{3n\pi}
\end{aligned}
$$

故

$$
f(x) \sim \frac{T}{6} - \frac{T}{3\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{2n\pi}{T}
$$

由 Dirichlet 定理，该级数在 $x \neq kT$ 时收敛于 $f(x)$，在 $x = kT$ 时收敛于 $\frac{T}{6}$。

(3)

直接计算可得

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} e^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{al}-e^{-al}}{al} \\
a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} e^{ax}\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n al(e^{al}-e^{-al})}{a^2l^2+n^2\pi^2} \\
b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} e^{ax}\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n n\pi(e^{al}-e^{-al})}{a^2l^2+n^2\pi^2}
\end{aligned}
$$

因此

$$
f(x) \sim \frac{e^{al}-e^{-al}}{2al} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(e^{al}-e^{-al})}{a^2l^2+n^2\pi^2}\left(al\cos nx + n\pi\sin nx\right)
$$

由 Dirichlet 定理，$x \neq kl$ 时级数收敛于 $f(x)$，$x = kl$ 时级数收敛于 $\frac{e^{al}+e^{-al}}{2}$。

(4)

注意到 $f(x)$ 是偶函数，故 $b_n=0$。而

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_1^2\mathrm{d}x=0$$
$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\cos\frac{n\pi x}{2}\,\mathrm{d}x-\int_1^2\cos\frac{n\pi x}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

于是

$$f(x)\sim\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)}\cos\frac{(2n-1)\pi}{2}x$$

3

(2)

先将 $f(x)$ 奇延拓为

$$g(x)=\begin{cases}0, & \frac{1}{2}\le|x|\le l\\ A, & 0\le x<\frac{1}{2}\\ -A, & -\frac{1}{2}<x<0\end{cases}$$

则 $a_n=0$，且

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{1}{2}}A\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x=\frac{2A}{n\pi}\left(1-\cos\frac{n\pi}{2l}\right)$$

于是

$$f(x)\sim\frac{2A}{n\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{n\pi}{2l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

再将 $f(x)$ 偶延拓为

$$h(x)=\begin{cases}0, & \frac{1}{2}\le|x|\le l\\ A, & 0\le|x|<\frac{1}{2}\end{cases}$$

则 $b_n=0$，且

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}h(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{1}{2}}A\,\mathrm{d}x=\frac{A}{l}$$
$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{1}{2}}A\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x=\frac{2A}{nl}\sin\frac{n\pi}{2l}$$

于是

$$f(x)\sim\frac{A}{2l}+\frac{2A}{n\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{2l}\cos\frac{n\pi}{l}x$$

5

(1)

将 $f(x)$ 偶延拓为

$$\bar{f}(x)=\begin{cases} f(x), & 0\le x<1 \\ f(-x), & -1<x<0 \end{cases}$$

由 Dirichlet 定理，不难得到

$$S(x)=\frac{\bar{f}(x^+)+\bar{f}(x^-)}{2},\ x\in(-1,1)$$

于是由周期性

$$S\left(\frac{9}{4}\right)=S\left(\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$$
$$S\left(-\frac{5}{2}\right)=S\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}+1}{2}=\frac{3}{4}$$

(2)

同理 (1) 可知

$$S(3\pi)=S(\pi)=\frac{-1+1+\pi^2}{2}=\frac{1}{2}\pi^2$$
$$S(-4\pi)=S(0)=\frac{-1+1}{2}=0$$

9

将 $f(x)$ 偶延拓为周期为 2π 的函数

$$\bar{f}(x)=\begin{cases} 1+x, & 0\le x\le\pi \\ 1-x, & -\pi\le x<0 \end{cases}$$

则

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{f}(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1+x)\,\mathrm{d}x=2+\pi$$
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{f}(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1+x)\cos nx\,\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x=-\frac{2}{n^2\pi}\left(1-(-1)^n\right)$$

由 Dirichlet 定理，$-\pi\le x\le\pi$ 时恒有

$$\bar{f}(x)=1+\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos nx=1+\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$$

于是取 $x=1$，得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{4}$$

取 $x=4$，得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 4(2n-1)}{(2n-1)^2}=\bar{f}(4)=\bar{f}(4-2\pi)=\pi-\frac{3}{8}\pi^2$$

10

注意到 $f(x)$ 是偶函数，故 $b_n=0$。直接计算可得

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}H\,\mathrm{d}x=\frac{2\tau H}{T}$$
$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}H\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2H}{n\pi}\sin\frac{n\pi\tau}{T}$$

于是直接计算可得

$$f(x)\sim\frac{\tau H}{T}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{H}{n\pi}\sin\frac{n\pi\tau}{T}e^{\frac{2n\pi i}{T}x}$$

习题 12.2

1

注意到 $f(x)$ 为偶函数，即 $b_n=0$。直接计算得

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x=\frac{2a}{\pi}$$
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{a}\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}\sin na$$

于是由 Parseval 等式

$$\frac{2a^2}{\pi^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}\sin^2 na=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2a}{\pi}$$

这说明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 na}{n^2}=\frac{a(\pi-a)}{2}$$

结合

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 na}{n^2}=\frac{\pi^2-3\pi a+3a^2}{6}$$

2

证明. 由均值不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_n}{n}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \le \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2) + \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\pi^2}{6} < +\infty$$

故该级数绝对收敛，从而收敛。另一级数同理。 □

3

由于积分与独点集无关，$f(x)$ 可视为奇函数，即 $a_n = 0$，于是

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)$$

，当 $0 < x < \pi$ 时

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)\sin nx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)\pi}\sin(2n-1)x = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 0, & x = \pm\pi, 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

由 Parseval 等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{(2n-1)^2\pi^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x = 2$$

这说明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

进一步，在 $[0,x]$ 上逐项积分得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)\pi}\int_0^x \sin(2n-1)t\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)^2\pi}\left(1-\cos(2n-1)x\right) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = x$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^n} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4}x$$

4

(1)

证明. 注意到

$$\int_0^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x = 0$$

且 $m \ne n$ 时

$$\int_0^{\pi}\cos mx\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos(m+n)x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos(m-n)x\,\mathrm{d}x = 0$$

这说明了正交性。

进一步

$$\int_0^{\pi} \mathrm{d}x = \pi \qquad \int_0^{\pi} \cos^2 nx \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \frac{1+\cos 2nx}{2} \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

因此，该正交系对应的标准正交系为

$$\left\{ \sqrt{\frac{1}{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos x, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos 2x, \cdots \right\}$$

□

(2)

证明. 注意到 $m \neq n$ 时

$$\int_0^{l} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \int_0^{l} \cos \frac{(m+n)\pi x}{l} \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int_0^{l} \cos \frac{(m-n)\pi x}{l} \,\mathrm{d}x = 0$$

这说明了正交性。

进一步

$$\int_0^{l} \sin^2 \frac{n\pi x}{l} \,\mathrm{d}x = \int_0^{l} \frac{1-\cos \frac{2n\pi}{l} x}{2} \,\mathrm{d}x = \frac{l}{2}$$

因此，该正交系对应的标准正交系为

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi}{l} x, \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{2\pi}{l} x, \cdots \right\}$$

□

(3)

证明. 注意到 $m \neq n$ 时

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2m+1)x \sin(2n+1)x \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2(m+n+1)x \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2(m-n)x \,\mathrm{d}x = 0$$

这说明了正交性。

进一步

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2n+1)x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2(2n+1)x}{2} \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$$

因此，该正交系对应的标准正交系为

$$\left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin 3x, \cdots \right\}$$

□

(4)

证明. 注意到 $m \neq n$ 时

$$\int_0^l \cos\frac{(2m+1)\pi x}{2l}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^l \cos\frac{(m+n+1)\pi x}{l}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^l \cos\frac{(m-n)\pi x}{l}\,\mathrm{d}x = 0$$

这说明了正交性。

进一步

$$\int_0^l \cos^2\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\,\mathrm{d}x = \int_0^l \frac{1+\cos\frac{(2n+1)\pi}{l}x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{l}{2}$$

因此，该正交系对应的标准正交系为

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{l}}\cos\frac{\pi}{2l}x, \sqrt{\frac{2}{l}}\cos\frac{3\pi}{2l}x, \cdots\right\}$$

□

6

直接计算可得

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{4}{(2n+1)\pi}x\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\bigg|_0^l - \frac{4}{(2n+1)\pi}\int_0^l \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\,\mathrm{d}x \\ &= (-1)^n\frac{4l}{(2n+1)\pi} - \frac{8l}{(2n+1)^2\pi^2} \end{aligned}$$

于是

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4l}{(2n+1)\pi}\left((-1)^n - \frac{2}{(2n+1)\pi}\right)\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}x$$

习题 12.3

8

证明. 我们将 $f(x)$ 奇延拓为

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} \frac{x-\pi}{2}, & -\pi \le x \le -1 \\ \frac{\pi-1}{2}x, & -1 < x < 1 \\ \frac{\pi-x}{2}, & 1 \le x \le \pi \end{cases}$$

直接计算可得

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{f}(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{\pi-1}{\pi}\int_0^1 x\sin nx\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_1^{\pi}(\pi-x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{\sin n}{n^2}$$

于是由 Dirichlet 定理

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2} \sin nx$$

□

9

取 $x = 1$，得到

$$\frac{\pi - 1}{2} = f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n}{n} \right)^2$$

不难验证其逐项求导后函数的一致收敛性，于是

$$\frac{\pi - 1}{2} = f'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} \cos nx \bigg|_{x=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$$

另一方面，由 Parseval 等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^4} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(x) \, \mathrm{d}x = \frac{\pi - 1}{\pi} \int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi} \int_1^{\pi} (\pi - x)^2 \, \mathrm{d}x = \frac{(\pi - 1)^2}{6}$$

问题反馈

- 注意函数的区间，不要看到 $f(x) = \frac{x}{3}$ 就直接当成奇函数来算。
- e^{ax} 和 x 与三角函数的积分结论可以记忆，省时省力；
- 积分前的系数 $\frac{1}{l}$ 和三角函数里的变量容易写差一个倍数；
- 第二类曲面积分正负号的判定需要一定经验，如果不放心，可以重新写成向量点乘的形式，看看点乘出来是正的还是负的；
- 如果正交函数系里有常数，则它的单位化往往与其他函数不同，因为“模长”不同；
- Dirichlet 定理只能保证一个周期内的相等，一旦要求 Fourier 级数在该周期外的值，需要平移到该周期内计算。