第十一周作业答案

于俊骜

2024 年 5 月 20 日

习题 11.3

1

(6)

曲线可参数化为

$$\mathbf{r}(\theta) = (1-\cos\theta, 1+\cos\theta, \sqrt{2}\sin\theta)$$

因此

$$\begin{aligned}\int_L y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} \left(\sin\theta + \sin\theta\cos\theta - \sqrt{2}\sin^2\theta + \sqrt{2}\cos\theta - \sqrt{2}\cos^2\theta\right)\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\sin\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\cos\theta - \sqrt{2}\sin^2\theta + \sqrt{2}\cos\theta - \sqrt{2}\right)\mathrm{d}\theta \\ &= -2\sqrt{2}\pi\end{aligned}$$

习题 11.4

1

(1)

令 $x = a\sin\theta\cos\varphi, y = b\sin\theta\sin\varphi, z = c\cos\theta$，则

$$\begin{aligned}\iint_S (x+y^2+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= ab\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\left(a\sin\theta\cos\varphi + b^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + c\cos\theta\right)\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \pi ab^3\int_0^{\pi}\sin^3\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta + abc\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{4\pi}{3}abc\end{aligned}$$

(2)

由题 $z = \pm\sqrt{R^2-x^2}$，因此由对称性

$$\iint_S xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\int_0^R \mathrm{d}x\int_0^h xy\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}y = h^2\int_0^R x\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}h^2R^3$$

(4)

令 $x=\sin\theta\cos\varphi, y=\sin\theta\sin\varphi, z=\cos\theta$，则

$$\iint_S yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cos\theta\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi}{4}$$

(5)

由对称性

$$\iint_S x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=3\iint_S(1-x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(1-x-y)\,\mathrm{d}y=\frac{1}{4}$$

(6)

注意到

$$\iint_S(y-z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_S(z-y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x=\int_S(z-x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y$$

于是

$$\iint_S(y-z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z-x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_S(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$$

(7)

由 Gauss 公式

$$\begin{aligned}\iint_S xz^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+x^2y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}z+y^2z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\iiint_V(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}V\\&=\int_{2\pi}^0\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^a r^4\,\mathrm{d}r\\&=\frac{2}{5}\pi a^5\end{aligned}$$

2

直接计算可得

$$\begin{aligned}\int_S\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S=&\int_{S_1}yz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\int_{S_2}0\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\int_{S_3}0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&+\int_{S_4}(a^3-yz)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-2b\int_{S_2}x^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\int_{S_3}c\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{3}a^3bc+abc\end{aligned}$$

习题 11.5

1

(1)

由 Gauss 公式

$$\iint_S (x+1)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (xy+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 3\iiint_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}$$

(2)

由 Gauss 公式

$$\begin{aligned}
&\iint_S xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + zx\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
=&\iiint_V (x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
=&\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int_0^{1-x-y} (x+y+z)\,\mathrm{d}z \\
=&\frac{1}{8}
\end{aligned}$$

(3)

由 Gauss 公式以及对称性

$$\begin{aligned}
&\iint_S x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}z^2\,\mathrm{d}x + zx\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
=&2\iiint_V (x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2} \\
=&2\int_0^R \mathrm{d}r \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} (a+b+c+r\sin\theta\cos\varphi + r\sin\theta\sin\varphi + r\cos\theta)\,\mathrm{d}\varphi \\
=&\frac{8}{3}\pi R^3(a+b+c) + 2\int_0^R r\,\mathrm{d}r \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} (\sin\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi + \cos\theta)\,\mathrm{d}\varphi \\
=&\frac{8\pi}{3}(a+b+c)R^3
\end{aligned}$$

(4)

由 Gauss 公式

$$\begin{aligned}
&\iint_S xy^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + yz^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + zx^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
=&\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
=&\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\cos\theta} r^3\sin\theta\,\mathrm{d}z \\
=&\frac{\pi}{15}
\end{aligned}$$

(5)

取 V 为旋转抛物面和 $z=1$ 围成的区域。由 Gauss 公式，结合对称性知

$$
\begin{aligned}
&\iint_S (x-z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y-x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
=&3\iiint_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-\iint_{x^2+y^2\le 1}(1-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
=&3\pi\int_0^1 z\,\mathrm{d}z\\
=&\frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

(6)

取 V 为上半球面和 $z=1$ 围成的区域。由 Gauss 公式，结合对称性知

$$
\begin{aligned}
&\iint_S (y^2+z^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z^2+x^2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
=&\iint_{x^2+y^2\le a}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
=&\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^3\,\mathrm{d}r\\
=&\frac{1}{2}\pi a^4
\end{aligned}
$$

4

由 Gauss 公式，空间中任意区域 V 上都有

$$\iiint_V \left(xf'(x)+(1-x)f(x)-e^{2x}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=0$$

因此

$$xf'(x)+(1-x)f(x)=e^{2x}$$

方程的通解为

$$f(x)=\frac{e^{2x}+Ce^x}{x}$$

结合初值条件，解得

$$f(x)=\frac{e^{2x}-e^x}{x}$$

9

(1)

由 Stokes 公式

$$\oint_L y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z=-\sqrt{3}\iint_S \mathrm{d}S=-\frac{3}{2}$$

(2)

由 Stokes 公式

$$\oint_L (y-z)\,\mathrm{d}x + (z-x)\,\mathrm{d}y + (x-y)\,\mathrm{d}z = \iint_S -2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - 2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x - 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$= -2\pi ah - 2\pi a^2 = -2\pi a(a+h)$$

问题反馈

- 如果用换元方法计算曲面积分，不要漏了 Jacobi，也要注意计算正确性，避免写着写着漏一项等错误；
- 别漏常数 a；
- 三个“分量”挨个计算曲面积分时，每个“分量”相当于的积分区域是曲面在那上面的投影（如果只投下去一层）；
- 第二类曲面积分正负号的判定需要一定经验，如果不放心，可以重新写成向量点乘的形式，看看点乘出来是正的还是负的；
- 注意“偶零奇倍”的使用条件，尤其是它“关于谁”是奇/偶函数。