第四次习题课讲义

于俊骜

2024 年 4 月 20 日

目录

1　期中复习

数分 (B2) 思维上的难点较 (B1) 少，计算相较证明更为重要。因此，下面我们简单把前三章需要掌握的内容简单一过（就这么点儿东西肯定都就记住了），之后大家复习的时候，多想想自己之前算错的题目，有时间练练叉乘、偏导、积分的计算。(B2) 考试中拉开差距的通常不是很难的证明，而是易错的计算。

1.1　第八章

直线与平面方程　这部分内容比较简单，注意计算即可。充分利用每个条件，就能把符合要求的直线、平面求出来。有些时候会求出**不止一个结果**，注意代回题目中检验，有时舍有时不舍。期中考试时，为了最大程度减少扣分，建议统一将平面写成格式

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

直线写成

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

特别注意，这种形式，若直线与坐标平面平行，则需要写成**联立**的形式。

垂直与平行关系　三维解析几何中，判断垂直平行关系的最好方法就是找出方向向量或法向量，然后利用

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Longleftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$$

$$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Longleftrightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$$

（多练练叉乘的计算，算错了？该罚！）

三维空间比较好想象，所以遇到比较绕的情景，最好能直接想象出来，或者在纸上画出来。当理论推导和直观想象产生矛盾时，很有可能就是出错了，有时间可以重新检查一下。

更多通过向量运算得到体积、投影、公垂线等的技巧可以参考**第一次习题课讲义**。

1.2　第九章

偏导与微分的计算　刚开始求偏导，比较容易漏“常数”项（其他变量构成的系数），也容易漏东西。不过这只能多练，没有什么特别好的方法。期中复习的时候可以看看自己算错的作业题，试着想明白错在哪，重新算算。考场上也可以多检查检查求导的题目，可能捡回几分。

正则性的互推关系要牢记，但考题通常不会这么简单。证明偏导数/方向导数存在，可能要用差商的极限；证明可微，一般是要从定义出发，减去偏导数的线性组合，证明余项是小量。

为了考察面尽可能宽，期中题目喜欢出隐函数求导。仍然是建议两边微分（参考 4.3 讲义），然后构成全微分的形式，系数就是偏导。不过隐函数定理仍然需要记忆，因为考试可能回要求先证明某点附近隐函数存在。还有存在感不高的逆映射定理别忘了。

参数曲线和曲面 数分中不会考太复杂的微分几何知识，掌握以下内容就好了：

- 计算参数曲线一点处的切向量、切线、法平面；
- 计算参数曲面一点处的法向量、法线、切平面；
- 计算曲线一点处的曲率。

极值与条件极值 必考！对于一般极值，求一阶导得逐点、二阶导得类型。如果求的是最值，有可能还要考虑**边界**。

条件极值套路也比较类似，大多数题给足你条件了，可以直接说明该点是极大/极小值点；如果不行，也可以求 Hessian 阵，一旦它是不加条件的极值点，那必然也是加条件的极值；如果还不行，最好的退路是把条件代入原函数消元（消不掉的话当成隐函数），对新函数用一般极值的方法判断。

1.3 第十章

积分的换序与计算 虽然课本上提到，被积函数足够好时，重积分才能化成累次积分。但事实上，数分不会出转化不了的题目。用分割求和取极限手推积分并不现实，所以放心化。当然，两个累次积分不能乱换序，在这里设坑还是有可能的。

至于用哪种方式化，原则就是**怎么方便怎么来**。一般来说，积分限看起来更简单（不必写成分段）的更好算一些。例如在 $y=x, y=x+1, x=0, x=1$ 围成的平行四边形 D 上有

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^{x+1} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \mathrm{d}y \int_{\max\{0,y-1\}}^{\min\{1,y\}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

显然前一个更方便计算。具体问题我们将在后面的题目详细讨论。

积分换元 换元的 Jacobi 行列式**要加绝对值**，这是因为我们只考虑正的面积元（事实上，一旦是负的，把两个元调换一下就正了）。极坐标、柱坐标、球坐标的 Jacobi 行列式要牢记，提笔就能写那种。另外，球坐标注意写法，最好用标准写法

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi \qquad z = r\cos\theta$$

否则积分范围和 Jacobi 可能不同。

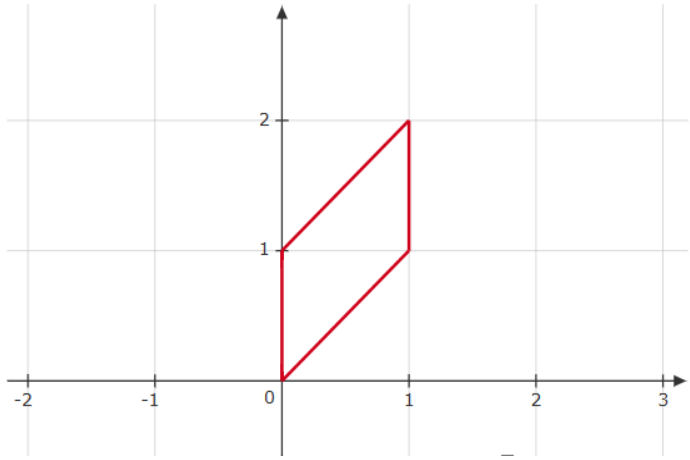

图 1: 积分区域 1

值得一提的是 n 维球坐标的换元：

$$
\begin{aligned}
x_1 &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}\\
x_2 &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}\\
&\cdots\cdots\\
x_{n-1} &= r\sin\theta_1\cos\theta_2\\
x_n &= r\cos\theta_1
\end{aligned}
$$

其 Jacobi 行列式为 $r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}$。

对于求区域面积的题目，最好能画出图来判断积分的范围。如果画不出来，则需要通过原方程的关系（往往是正负性，比如 r 非负）得到被积变量的范围。

2 作业解答

2.1 习题 9.5.4

证明. 只要 f 在 $[a,b]\times[c,d]$ 可积，就有

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d \varphi(x)\psi(y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x\int_c^d \psi(y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x\int_c^d \psi(x)\,\mathrm{d}x$$

下面只要证可积性。

事实上，对于分割

$$\pi_1 : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$$
$$\pi_2 : a = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = b$$

有

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{\|\pi_1\|\to 0\\ \|\pi_2\|\to 0}} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_i,\eta_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})\\
=&\lim_{\substack{\|\pi_1\|\to 0\\ \|\pi_2\|\to 0}} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \varphi(\xi_i)\psi(\eta_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})\\
=&\lim_{\substack{\|\pi_1\|\to 0\\ \|\pi_2\|\to 0}} \sum_{i=1}^{m} \varphi(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \sum_{j=1}^{n} \psi(\eta_j)(y_j - y_{j-1})\\
=&\left(\lim_{\|\pi_1\|\to 0} \sum_{i=1}^{m} \varphi(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\right)\left(\lim_{\|\pi_2\|\to 0} \sum_{j=1}^{n} \psi(\eta_j)(y_j - y_{j-1})\right)\\
=&\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \int_c^d \psi(y)\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

存在，从而 f 在 $[a,b]\times[c,d]$ 可积。 □

注 1. 目前我们没有学到什么判断可积的好方法，这种题基本是要从定义来，分割求和取极限。当然，考试出了的可能性不大。这题其实也可以用 *Riemann* 可积的等价判定证明，但需要一点**乘积测度**的知识。另外可以提一下，*Lebesgue* 积分中，只要 $f(x,y)$ 非负或 L^1（拓展部分会解释），重积分就可以化成累次积分且可以换序。

2.2 习题 10.1.7

从个人学数学的经验来看，证明极限是某个值，一般比证明极限是 0 难。对于后一个问题，我们可以把式子往大放，通过不等式证明它跑不出 ε 的小范围。对于本题，我们比较容易判断出极限是 $f(0,0)$，所以可以采取这种做法。

证明. 由题，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时，有

$$|f(x,y)-f(0,0)|<\varepsilon$$

因此，只要 $r<\delta$，就有

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\pi r^2}\iint_{B(\mathbf{0},r)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-f(0,0)\right| &= \left|\frac{1}{\pi r^2}\iint_{B(\mathbf{0},r)} (f(x,y)-f(0,0))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| \\ &\le \frac{1}{\pi r^2}\iint_{B(\mathbf{0},r)} |f(x,y)-f(0,0)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &\le \frac{1}{\pi r^2}\iint_{B(\mathbf{0},r)} \varepsilon\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

即

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint_{B(\mathbf{0},r)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=f(0,0)$$

□

除此之外，一个更容易想到的方法是采用中值定理。积分处理起来比较麻烦，那我们就把它拆掉，正好可以和前面的面积的倒数抵消。而那个代表元，随着圈儿越缩越小，它只能往原点处跑毒，由 f 的连续性，最后就被箍在原点了，这辈子就交代在这了。

证明. 由积分中值定理，存在 $(\xi,\eta)\in B(\mathbf{0},r)$，使得

$$\frac{1}{\pi r^2}\iint_{B(\mathbf{0},r)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{|B(\mathbf{0},r)|}{\pi r^2}f(\xi,\eta)=f(\xi,\eta)\to f(0,0),\ r\to 0$$

□

2.3 习题 10.2.1(1)

本题没什么难度，但错误率较高，主要问题是搞错积分区域。累次积分的每个积分限就是一个限制条件，把他们联立，就可以得到积分区域，这里就是一个四分之一圆。

证明. 令 $t=r^2$，则

$$\begin{aligned}\int_0^R \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)\,\mathrm{d}y &= \iint_D \ln(1+x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^R r\ln(1+r^2)\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{\pi}{4}\int_0^{R^2}\ln(1+t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi}{4}(1+R^2)\ln(1+R^2)-\frac{\pi}{4}R^2\end{aligned}$$

□

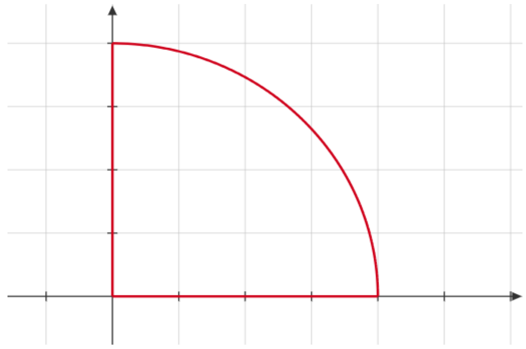

图 2: 积分区域 2

2.4　习题 10.2.3(3)

令 $s=xy, t=\frac{y}{x}$，则

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2\sqrt{st}} & -\frac{1}{2t}\sqrt{\frac{s}{t}}\\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{t}{s}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{t}}\end{vmatrix}=\frac{1}{2t}$$

于是不难得到

$$\iint_D(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_1^2\mathrm{d}s\int_1^2\frac{1}{2t}\left(\frac{s}{t}+st\right)\mathrm{d}t=\int_1^2\frac{3s}{4}\,\mathrm{d}s=\frac{9}{8}$$

注 2. 本题的换元一眼丁真，但有细心的同学注意到这些曲线在第三象限也围出了一个相同的区域，疑问是否结果要除以 2。答案是不需要，因为积分的时候，两个新元都是**连续地**从 1 变到 2 的，所以压根没有机会反水。

图 3: 积分区域 3

2.5 习题 10.3.1(2)

这题看起来积分限不太好确定，但仔细分析就可以得到其中的限制关系。事实上，x 没被其他变量限制，上下限都是常数，方便最后积；y 只被 x 限制，可以放在 x 前面，倒数第二个积；z 比较倒霉，x 和 y 都对它有影响，所以只能第一个积了。

$$\begin{aligned}\iiint_V xy^2z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{d}y\int_0^{xy} xy^2z^3\,\mathrm{d}z = \frac{1}{4}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x x^5y^6\,\mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{28}\int_0^1 x^{12}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{364}\end{aligned}$$

3 难题选讲

3.1 习题 10.2.3

证明. 令 $s=x, t=x-y$，则

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix} = -1$$

于是

$$\begin{aligned}\iint_D f(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{-A}^0\mathrm{d}t\int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}+t} f(t)\,\mathrm{d}s + \int_0^A\mathrm{d}t\int_{t-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} f(t)\,\mathrm{d}s\\ &= \int_{-A}^0 f(t)(A+t)\,\mathrm{d}t + \int_0^A f(t)(A-t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{-A}^A f(t)(A-|t|)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

□

注 3. 前面是 $f(x+y)$，结果希望是 $f(t)$，所以肯定是要令 $t=x+y$。另一个元看起来没有用到，所以留着就行。

3.2 第 10 章综合习题 6

设 $x=r\sin\theta\cos\varphi, y=r\sin\theta\sin\varphi, z=r\cos\theta$，则

$$(x^2+y^2)^2+z^4\le y \Longrightarrow r^4\sin^4\theta + r^4\cos^4\theta \le r\sin\theta\sin\varphi \Longrightarrow r^3\le\frac{\sin\theta\sin\varphi}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}$$

于是体积为

$$\begin{aligned}\iiint_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^\pi \mathrm{d}\varphi \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt[3]{\frac{\sin\theta\sin\varphi}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}}} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{3}\int_0^\pi \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \int_0^\pi \frac{\sin^2\theta}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^2\theta(\tan^2\theta+1)}{\tan^4\theta+1}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi}{3}\end{aligned}$$

注 4. 遇到平方和，不是柱坐标就是球坐标。这里左边是 4 次齐次的，球坐标换元可以给出 r 的一个范围，积分限就有了。本题是给出了不等号，如果题目给的是等号，那么**幂次高的那一侧小于幂次低的那一侧**，得到的一般是区域内部。

3.3 第 10 章综合习题 7

证明. 令 $t=xy$，则

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,t)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{t}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{1}{x}$$

于是

$$\begin{aligned}\iint_{[0,1]^2} (xy)^{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \int_0^x t^t\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^t\,\mathrm{d}t \int_t^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 t^t \ln t\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 t^t\,\mathrm{d}t - \int_0^1 (1+\ln t)t^t\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^t\,\mathrm{d}t + t^t|_0^1 = \int_0^1 t^t\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

□

注 5. 积不了两个，我还积不了一个吗？

3.4 第 10 章综合习题 9

(1)

令 $x=tu, y=tv$，则

$$F(t) = \iint_{[0,t]^2} f(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = t^2 \iint_{[0,1]^2} f(t^2uv)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

求导得

$$\begin{aligned}F'(t) &= 2t\iint_{[0,1]^2} f(t^2uv)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + t^2\iint_{[0,1]^2} 2tuvf'(t^2uv)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\ &= \frac{2}{t}\iint_{[0,1]^2} t^2f(t^2uv)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + 2t\iint_{[0,1]^2} t^2f'(t^2uv)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\ &= \frac{2}{t}\left(F(t) + \iint_{[0,t]^2} f'(t^2uv)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\right)\end{aligned}$$

(2)

令 $s = xy$，则

$$F(t) = \int_0^t \mathrm{d}x \int_0^t f(xy)\,\mathrm{d}y = \int_0^t \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \int_0^{tx} f(s)\,\mathrm{d}s$$

求导并换元得

$$F'(t) = \frac{1}{t}\int_0^{t^2} f(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t f(tx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{t}\int_0^{t^2} f(s)\,\mathrm{d}s$$

注 6. 这种题的精髓就在于先射箭后画靶。*(1)* 中要求结果里带 t^2uv，那就换元 $x = tu, y = tv$（这么换还有一个好处是把 t 从积分限上揪出来）；*(2)* 中要求结果里带 xy，那就换元 $s = xy$。

3.5 第 10 章综合习题 12

证明. 设

$$\Omega = \{(x_1, \cdots, x_n) | x_i \geq 0,\, x_1 + \cdots + x_n \leq a\}$$

则

$$\begin{aligned}\int_a^b \mathrm{d}x_1 \cdots \int_a^{x_{n-1}} f(x_1, \cdots, x_n) &= \int \cdots \int_\Omega f(x_1, \cdots, x_n)\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n\\ &= \int_a^b \mathrm{d}x_n \cdots \int_{x_2}^b f(x_1, \cdots, x_n)\,\mathrm{d}x_1\end{aligned}$$

□

注 7. 累次积分换序时，如果搞不清楚上下限，一个比较好的方式时判断重积分的积分区域。

4 拓展：n 重积分的应用——Sobolev 不等式

Sobolev 不等式的动机，来自**用导数控制函数值**。对于有界集上的 C^1 函数，只要导数不太大，函数增长较慢，那么函数值也大不到哪去。因此，导数的最值是有可能把函数的最值控制住的。然而一旦变成全空间上的函数，这种控制就失效了。比如 $y=x$，导数恒为 1，但函数值会达到无穷。

你的值域比较松弛，但你紧的定义域又弥补了这一部分。如果你要做延拓，把函数定义到全空间的话，可能会显得你的函数值比较大，会有一些趋于无穷的情况。现在最好的办法就是你做延拓的同时，给导数加一种控制。

通过最值控制的梦想破灭了，但我们还有一条路，就是**用积分控制**。

4.1 L^p 范数

我们注意到 $[0,1]$ 上的连续函数在加法和数乘运算下仍保持其原有性质，所以构成一个线性空间，即连续函数空间，记为 $C([0,1])$。

事实上，其他一些具有某种共同性质的函数类也能构成线性空间，称为**函数空间**。此时，我们可以“把函数看作点”，研究两个函数之间的“距离”。首先来回顾一下**范数**的概念：

定义 1 (范数). *设 X 是一个线性空间，如果一个函数 $\|\cdot\|: X\to[0,+\infty)$ 对任意 $x,y\in X$，满足*

1. *正定性：$\| x \|\geq 0$，且等号成立当且仅当 $x=0$；*
2. *齐次性：$\| \lambda x \|=|\lambda| \| x \|$，任意实数 λ；*
3. *三角不等式：$\| x+y \|\leq\| x \|+\| y \|$*

*则称 $\|\cdot\|$ 是 X 上的一个***范数***。不难验证，模长就是欧氏空间的一种范数。*

欧氏空间中，点的距离很直观，但我们怎么判断两个函数的距离远近呢？以一元函数为例，我们先判断一个函数和零函数的“距离远近”，最直观的想法是看看它和 x 轴“围成的面积大不大”。于是，就有了用积分定义范数的想法。

定义 2 (L^1 范数). *设函数 $f(x)$ 定义在集合 E 上，则它的 L^1 范数为*

$$\| f \|_{L^1(E)}=\int_E |f(x)|dx$$

特别地，若 $f(x)$ 定义在整个 $\mathbb{R}^n$ 上，则

$$\| f(x) \|_{L^1(\mathbb{R}^n)}=\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx$$

举个例子，正态分布的密度函数，其 L^1 范数就是 1。这里先取绝对值再积分，是为了保证正定性。感兴趣的同学可以（Riemann 意义下也行）自行验证它满足范数的性质。

注 8. 这里 L^1 范数小于无穷的函数称为 ***Lebesgue* 可积函数**，简称为 L^1 函数。事实上，判断某个元素是属于某个**赋范线性空间**（有范数的线性空间），当且仅当它的范数有限。比如 21010383 的模长有限，所以它属于 $\mathbb{R}$；但 $\pm\infty$ 的模长不是有限的，所以不是实数。

欧氏空间中有 p 范数，那一碗水端平，函数空间也应该有，我们可以将 L^1 推广到 L^p。

定义 3 (L^p 范数)**.** 设函数 $f(x)$ 定义在集合 E 上，则对于 $1 \leq p < +\infty$，定义它的 L^p 范数为

$$\| f \|_{L^p(E)} = \left(\int_E |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

不引起混淆时，可以简记为 $\| f \|_{L^p}$ 或 $\| f \|_p$。

这里最外面的 $\frac{1}{p}$ 次方是保证范数的齐次性。

注 9. $0 < p < 1$ 时，上面定义的不再是范数，这是因为它不再满足三角不等式。但是 $p = +\infty$ 时，我们仍然可以定义 **$\mathbf{L}^\infty$ 范数**。但它的定义需要一点测度论的知识，且与今天的主题无关，所以省略。

4.2 Hölder 不等式

为了证明 Sobolev 不等式，我们还需要最后一个准备工作，即 Hölder 不等式，它是函数空间理论中最常用的不等式之一。我们首先引入下面的不等式：

定理 1 (Young 不等式)**.** 设 $1 < p < +\infty$，q 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$。则对于 $a, b > 0$，恒有

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

证明. 由于 $y = e^x$ 是凸函数，于是由凸函数定义

$$ab = e^{\ln a + \ln b} = e^{\frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q} \leq \frac{1}{p} e^{\ln a^p} + \frac{1}{q} e^{\ln b^q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

$\square$

注 10. 满足上面条件的 p, q 称为一对**共轭指数**，有时候记 $q = p'$。

下面就可以证明 Hölder 不等式了：

定理 2 (Hölder 不等式). 设 p, q 是共轭指数，若 $\| f \|_p$ 和 $\| g \|_q$ 均存在且有限，则

$$\| fg \|_{L^1} \leq \| f \|_{L^p} \| g \|_{L^q}$$

即

$$\int |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

证明. 不妨设 $\| f \|_{L^p} = \| g \|_{L^q} = 1$，否则两边同时除以 $\| f \|_{L^p} \| g \|_{L^q}$，对

$$u(x) = \frac{f(x)}{\| f \|_{L^p}} \qquad v(x) = \frac{g(x)}{\| g \|_{L^q}}$$

证明即可。

由 Young 不等式

$$\int |f(x)g(x)|dx \leq \frac{1}{p} \int |f(x)|^p dx + \frac{1}{q} \int |g(x)|^q dx = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

□

该不等式可以从两个函数推广到多个函数：

定理 3 (推广的 Hölder 不等式). 设 $1 < p_1, \cdots, p_k < +\infty$ 满足

$$\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_k} = 1$$

且 f_i 的 L^{p_i} 范数存在且有限，则

$$\| f_1 \cdots f_k \|_{L^1} \leq \| f_1 \|_{L^{p_1}} \cdots \| f_k \|_{L^{p_k}}$$

证明. 只需取 $\frac{1}{q} = \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_k}$，利用一般的 Hölder 不等式对 k 归纳证明。 □

4.3 Sobolev 不等式

有了以上准备工作，我们就可以介绍 Sobolev 不等式了：

定理 4 ($\mathbb{R}^n$ 中的 Sobolev 不等式). 设 $1 \leq p < n$，且 p^* 是 p 的 ***Sobolev* 共轭指数**，即

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$$

则对于 $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$，只要

$$\lim_{|x| \to \infty} u(x) = 0$$

就有

$$\| u \|_{p^*} \leq C \| \nabla u \|_p$$

其中 C 是只与 n, p 有关的常数。

看到这个不等式，我们自然会产生疑问：“为什么要取这么奇怪的一个 p^* ？”下面，我们将通过**积分换元**来说明 p^* 的选取原因。

事实上，如果对于 q 有

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

我们可以试着把函数 $u(x)$ 缩放一下，即代入 $v(x)=u(\lambda x)$，并记 $y=\lambda x$，得到

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|v(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n}|u(\lambda x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\frac{1}{\lambda^n}\int_{\mathbb{R}^n}|u(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}} = \lambda^{-\frac{n}{q}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}}$$

以及

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla v(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u(\lambda x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{\lambda^n}\int_{\mathbb{R}^n}|\lambda\nabla u(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} = \lambda^{1-\frac{n}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

带入 $v(x)$ 的 Sobolev 不等式，得到

$$\lambda^{-\frac{n}{q}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\lambda^{1-\frac{n}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

即

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\lambda^{1-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

由于 C 与 λ 无关，因此若想要 Sobolev 不等式恒成立，只可能 $q=p^*$。

下面，我们将采用 **Nirenberg** 的方法，仅用 **Hölder 不等式**和 **n 重积分**来证明 Sobolev 不等式。

证明. $p=1$ 时，不等式化为

$$\int_{\mathbb{R}^n}|u(x)|^{\frac{n}{n-1}}dx \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u(x)|dx\right)^{\frac{n}{n-1}}$$

单独考虑第 i 个分量，由于 $u(x)$ 在无穷远处为 0，因此由微积分基本定理

$$u(x)=\int_{-\infty}^{x_i}u_i(x_1,\cdots,x_{i-1},y_i,x_{i+1},\cdots,x_n)dy_i$$

这里 $u_i=\frac{\partial u}{\partial x_i}$。因此对于 $1\leq i\leq n$，都有

$$\begin{aligned}|u(x)| &\leq \int_{-\infty}^{x_i}|u_i(x_1,\cdots,x_{i-1},y_i,x_{i+1},\cdots,x_n)|dy_i\\ &\leq \int_{-\infty}^{x_i}|\nabla u(x_1,\cdots,x_{i-1},y_i,x_{i+1},\cdots,x_n)|dy_i\\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty}|\nabla u(x_1,\cdots,x_{i-1},y_i,x_{i+1},\cdots,x_n)|dy_i\end{aligned}$$

将以上 n 个不等式相乘，并开 $n-1$ 次方，得到

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^{n}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|\nabla u(x_1,\cdots,x_{i-1},y_i,x_{i+1},\cdots,x_n)|dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

接下来，两边对 x_1 分量积分。注意连乘号里 $i=1$ 的项已经与 x_1 无关，可以提出来。于是

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}|u(x)|^{\frac{n}{n-1}}dx_1 &\leq \int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{i=1}^{n}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|\nabla u|dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}dx_1\\
&= \left(\int_{-\infty}^{+\infty}|\nabla u|dy_1\right)^{\frac{1}{n-1}}\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{i=2}^{n}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|\nabla u|dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}dx_1\\
&\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty}|\nabla u|dy_1\right)^{\frac{1}{n-1}}\left(\prod_{i=2}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|\nabla u|dx_1dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}
\end{aligned}$$

最后一步利用了推广的 Hölder 不等式，取 $p_1=\cdots=p_{n-1}=n-1$。

接下来，再对 x_2 分量积分，同理提出连乘号里 $i=2$ 的项，得到

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|u(x)|^{\frac{n}{n-1}}dx_1dx_2 \leq &\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|\nabla u|dx_1dy_2\right)^{\frac{1}{n-1}}\\
&\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|\nabla u|dy_1\right)^{\frac{1}{n-1}}\left(\prod_{i=3}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|\nabla u|dx_1dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}dx_2
\end{aligned}$$

再次应用推广的 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|\nabla u|dy_1\right)^{\frac{1}{n-1}}\left(\prod_{i=3}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|\nabla u|dx_1dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}dx_2\\
\leq &\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|\nabla u|dy_1dx_2\right)^{\frac{1}{n-1}}\left(\prod_{i=3}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|\nabla u|dx_1dx_2dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|u(x)|^{\frac{n}{n-1}}dx_1dx_2 \leq &\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|\nabla u|dx_1dy_2\right)^{\frac{1}{n-1}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|\nabla u|dy_1dx_2\right)^{\frac{1}{n-1}}\\
&\cdot\left(\prod_{i=3}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|\nabla u|dx_1dx_2dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}
\end{aligned}$$

接下来，依次对 $x_3,\cdots,x_n$ 分量积分，并使用推广的 Hölder 不等式，最终得到

$$\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{\frac{n}{n-1}}dx\le\prod_{i=1}^{n}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}|\nabla u|dx_1\cdots dy_i\cdots dx_n\right)^{\frac{1}{n-1}}=\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|dx\right)^{\frac{n}{n-1}}$$

$p=1$ 的情形证毕。

对于一般的 $p>1$，令 $v=|u|^a$，其中 $a>1$ 待定。于是对 v 应用 $p=1$ 的 Sobolev 不等式，得到

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{\frac{an}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}}\le\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla|u|^a|dx=a\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{a-1}|\nabla u|dx\le a\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{\frac{p(a-1)}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

最后一步用到了 Hölder 不等式。

我们令

$$\frac{an}{n-1}=\frac{p(a-1)}{p-1}\Longrightarrow a=\frac{p(n-1)}{n-p}>1$$

带入即得

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{\frac{pn}{n-p}}\right)^{\frac{n-1}{n}}=\frac{p(n-1)}{n-p}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{\frac{pn}{n-p}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

移项得到最终结论。 □

Sobolev 不等式有很多证法，而 Nirenberg 的证法无疑是最初等的一个。不过 Nirenberg 没能求出该不等式的**最佳常数** C。

后来在 1975 年，**Talenti** 采用 **Schwartz 对称化**和**变分法**得到了 Sobolev 不等式的最佳常数

$$C=\frac{1}{\sqrt{\pi}n^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\frac{\Gamma(1+\frac{n}{2})\Gamma(n)}{\Gamma(\frac{n}{p})\Gamma(1+n-\frac{n}{p})}\right)^{\frac{1}{n}}$$

等号成立当且仅当

$$u(x)=\frac{1}{(a+b|x|^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{n-p}{p}}}$$

注 11. 取 $u=\chi_\Omega, p=1$，我们可以得到**等周不等式**

$$\mathcal{H}^n(\Omega)^{\frac{n-1}{n}}\le C\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)$$

等号成立当且仅当 χ_Ω 是径向的，即 Ω 是球。$\mathcal{H}^m$ 是 m 维 ***Hausdorff* 测度**，对于 $1,2,3$ 维依次是长度、面积、体积。

该不等式说明了周长一定时，面积最大的平面图形是圆；表面积一定时，体积最大的空间图形是球。