曲面：从平面区域 $\underset{\sim}{D}$（定义域）$=\{(u,v)\}$ 到 E^3（值域）的映射

$\vec{r}(u,v)=\big(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)\big)$ 且满足如下两个性质：

① $x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)$ 无限阶连续可微

② 向量 $r_u,\ r_v$ 线性无关（$r_u \wedge r_v \neq 0$）

我们学的两种平面：

(i). $z=f(x,y) \Rightarrow$ 表示为 $r(u,v)=(x,y,f(x,y))$

$$r_x=(1,0,f_x)$$

$$r_y=(0,1,f_y)$$

$$r_x \wedge r_y=\begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{pmatrix}=(-f_x,-f_y,1)\neq 0$$

(ii). 隐函数表示：$F(x,y,z)=0$

由[隐函数定理]在 (x_0,y_0) 的小邻域内，$F(x,y,z)$ 有显性表示：

$$r(x,y)=(x,y,f(x,y))$$

$$r_x=\left(1,0,f'_x=-\frac{F'_x}{F'_z}\right)$$

$$r_y=\left(0,1,f'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}\right)$$

$$r_x \wedge r_y=\begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -\frac{F'_x}{F'_z} \\ 0 & 1 & -\frac{F'_y}{F'_z} \end{pmatrix}=\left(-\frac{F'_x}{F'_z},\frac{F'_y}{F'_z},1\right)\neq 0$$

所以他们都是平面(喜).

既然有了曲面的严格定义，我们来研究曲面的坐标变换.

注意：曲面不再是具象的图形，而是一个平面区域 D 到 E^3 的映射.

[0,1]). 求

描述一个曲面可以用不同的参数表示：

如：球面：$x^2+y^2+z^2=a^2$

· 基础：$r(x,y)=(x,y,\sqrt{a^2-x^2-y^2})$

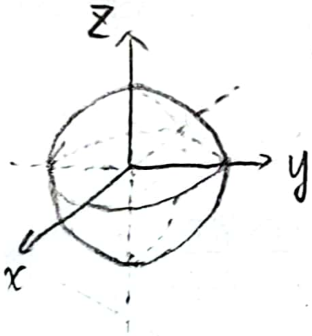
$D=\{(x,y)\}=\{x^2+y^2<a^2\}$

· 球坐标表示：

$r(\bar{u},\bar{v})=(a\cos u\cos v,\ a\cos u\sin v,\ a\sin u)$

$\bar{D}=\{(u,v): -\frac{\pi}{2}\leq u<\frac{\pi}{2}, 0<v<2\pi\}$

· 球极投影坐标：



选取球面上除北极 $(0,0,a)$ 外的任一点 (x,y,z).

则球面上任一点与 $(0,0,a)$ 间连线必交 xy 平面.

反而言之：xy 平面上任一点与 $(0,0,a)$ 连线必还有经过球面上一点. 即 $(u,v,0)$ 与 $(0,0,a)$ 连线交于

$=1$

$$\left(2\frac{a^2u}{a^2+u^2+v^2},\ 2\frac{a^2v}{a^2+u^2+v^2},\ a\frac{u^2+v^2-a^2}{a^2+u^2+v^2}\right)\triangleq r(u,v)$$

$D(u,v)$ 此时即为 xy 平面.

对于曲面 $\vec{r}(u,v): D\longmapsto E^3$

以及参数变换：$\sigma: (\bar{u},\bar{v})\in\bar{D}\longmapsto(u,v)\in D$ 为 1-1 对应（单射，满射）

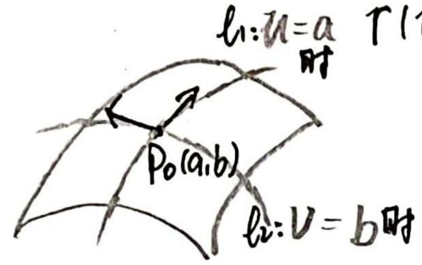
且 Jacobi 行列式：
$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})}=\begin{pmatrix}\frac{\partial u(\bar{u},\bar{v})}{\partial\bar{u}}, & \frac{\partial v(\bar{u},\bar{v})}{\partial\bar{u}}\\ \frac{\partial u(\bar{u},\bar{v})}{\partial\bar{v}}, & \frac{\partial v(\bar{u},\bar{v})}{\partial\bar{v}}\end{pmatrix}\neq 0.$$

则有曲面 $\vec{r}$ 的新表示：

$$\vec{r}(\bar{u},\bar{v}): \bar{D}\longmapsto E^3$$

$$\vec{r}(\bar{u},\bar{v})=r\circ\sigma(\bar{u},\bar{v})=r(u(\bar{u},\bar{v}),v(\bar{u},\bar{v}))$$

曲面的"切平面"与"法向"



$r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$
$(u,v)\in D$

固定$u=a$，则$r(a,v)$为一空间曲线l_1，其在$v=b$时
切向量为：$r_v(a,b) = \dfrac{d\vec{r}}{dv}(a,b)$

同理，固定$v=b$，有$r(u,b)$，其切向量为：$r_u(a,b) = \dfrac{d\vec{r}}{du}(a,b)$.

由曲面定义知：r_u与r_v不共线.

则r_u与r_v张成了一张平面：[切平面]，记为$T_{P_0}S$

r_u, r_v被命名为[坐标切向量]

过P_0垂直于$T_{P_0}S$的线称为[法线]，可知其与r_u, r_v均垂直.

$r_u \wedge r_v$即满足该条件，为[法向量]

Tips:
① 切平面和法线参数选取无关
② 曲面上过P_0点的曲线在P_0处切向量全体组成$T_{P_0}S$

曲面的第一~~标准~~基本形式.

已知：S上点P_0的切向量$\vec{v}$在由$\vec{r_u}, \vec{r_v}$张成的平面$T_{P_0}S$上，故$\vec{v}$可表示为：

$$\vec{v} = \lambda \vec{r_u} + \mu \vec{r_v}$$

记：$E=\langle r_u, r_u\rangle \quad F=\langle r_u, r_v\rangle \quad G=\langle r_v, r_v\rangle$

考虑S上的曲线$r(u(t), v(t))$，其切向量为：

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = r_u\cdot u'(t) + r_v\cdot v'(t)$$

曲线在$a<t<c$间弧长为：

$$s = \int_a^c \left|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right| dt = \int_a^c \sqrt{E(u'(t))^2 + 2F(u'(t))(v'(t)) + G(v'(t))^2}\, dt$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right) + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \triangleq I$$

即：$I = ds^2 = E\,du\cdot du + 2F\,du\,dv + G\,dv\,dv$ [第一基本形式].

什么叫基本？保持不变的就是基本!!

第一基本形式. ①不同坐标下保持不变　属于曲面自己的性质.
②合同变换下保持不变.

①不同坐标下保持不变:

假设参数 (u,v) 下: $I(u,v) = E\,du\,du + 2F\,du\,dv + G\,dv\,dv$

参数 $(\bar{u},\bar{v})$ 下: $I(\bar{u},\bar{v}) = \bar{E}\,d\bar{u}\,d\bar{u} + 2\bar{F}\,d\bar{u}\,d\bar{v} + \bar{G}\,d\bar{v}\,d\bar{v}$

$\sigma: (u,v) \longmapsto (\bar{u},\bar{v})$ 为参数变换.

$$\bar{E} = \langle r_{\bar{u}}, r_{\bar{u}} \rangle = \langle r_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + r_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}},\ r_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + r_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \rangle$$

$$= \langle r_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}}, r_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \rangle + \langle r_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}}, r_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \rangle + \langle r_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}, r_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \rangle + \langle r_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}, r_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \rangle$$

$$= E\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}}\right)^2 + 2F\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}}\frac{\partial v}{\partial \bar{u}}\right) + G\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}}\right)^2$$

同理: $$\bar{F} = \langle r_{\bar{u}}, r_{\bar{v}} \rangle = E\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}}\frac{\partial u}{\partial \bar{v}}\right) + F\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}}\frac{\partial v}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}\frac{\partial u}{\partial \bar{v}}\right) + G\left(\frac{\partial v}{\partial \bar{u}}\frac{\partial v}{\partial \bar{v}}\right)$$

$$\bar{G} = \langle r_{\bar{v}}, r_{\bar{v}} \rangle = E\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{v}}\right)^2 + 2F\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{v}}\frac{\partial v}{\partial \bar{v}}\right) + G\left(\frac{\partial v}{\partial \bar{v}}\right)^2$$

$$\begin{pmatrix} \bar{E} & \bar{F} \\ \bar{F} & \bar{G} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \end{pmatrix}}_{\overset{\triangle}{=} J} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \end{pmatrix}}_{= J^T}.$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} d\bar{u} + \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} d\bar{v}$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} d\bar{u} + \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} d\bar{v}$$

$$(du, dv) = (d\bar{u}, d\bar{v}) \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \end{pmatrix}}_{= J}$$

$$I(\bar{u},\bar{v}) = (d\bar{u}, d\bar{v}) \begin{pmatrix} \bar{E} & \bar{F} \\ \bar{F} & \bar{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

$$= (d\bar{u}, d\bar{v})\, J \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} J^T \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

$$= (du, dv) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = I(u,v).$$

曲面的第二基本形式：

法向量：$r_u \wedge r_v$，

单位法向量：$\dfrac{r_u \wedge r_v}{|r_u \wedge r_v|} \triangleq n$，则有：$\langle r_u, n\rangle = 0$ ①
$\langle r_v, n\rangle = 0$ ②

定义第二基本形式：$\mathrm{II} = -\langle dr, dn\rangle$

对①式求偏导：

$$0 = \frac{\partial\langle r_u, n\rangle}{\partial u} = \overset{L}{\langle r_{uu}, n\rangle} + \overset{-L}{\langle r_u, n_u\rangle}$$

$$0 = \frac{\partial\langle r_u, n\rangle}{\partial v} = \overset{M}{\langle r_{uv}, n\rangle} + \overset{-M}{\langle r_u, n_v\rangle}$$

对②式求偏导：

$$0 = \frac{\partial\langle r_v, n\rangle}{\partial u} = \overset{M}{\langle r_{vu}, n\rangle} + \overset{-M}{\langle r_v, n_u\rangle}$$

$$0 = \frac{\partial\langle r_v, n\rangle}{\partial v} = \overset{N}{\langle r_{vv}, n\rangle} + \overset{-N}{\langle r_v, n_v\rangle}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{II} = -\langle dr, dn\rangle &= -\langle r_u du + r_v dv, n_u du + n_v dv\rangle \\ &= -[\underbrace{\langle r_u, n_u\rangle}_{-L} du du + \underbrace{\langle r_u, n_v\rangle}_{-M} du dv + \underbrace{\langle r_v, n_u\rangle}_{-M} dv du + \langle r_v, n_v\rangle dv dv] \\ &= L du du + 2M du dv + N dv dv\end{aligned}$$

范数：实线性空间 V 上的一个函数

$\|\cdot\|: V \mapsto [0,\infty)$　　$x\in V$

满足：① 正定性：$\|x\|\geq 0$，等号成立 $\Leftrightarrow x=0$.

② 齐性：$\|ax\|=\|a\|\cdot\|x\|$　　$\forall a\in\mathbb{R}$.

③ 三角不等式：$\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$

定义了范数的线性空间 $\Rightarrow$ 赋范线性空间，记为 $(V,\|\cdot\|)$.

① Euclid 范数：点 $x\in\mathbb{R}^n$，$\|x\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}$

② p 范数：点 $x\in\mathbb{R}^n$，$\|x\|_p=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

③ max 范数：② 中 $p\to\infty$ 的情况：$\max\{|x_j|,1\leq j\leq n\}$.

④ 函数空间：$C([a,b])$ 中定义：$\|f\|_p=\left[\int_a^b|f(x)|^p\right]^{\frac{1}{p}}$

$\|f\|_\infty=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$

内积诱导的范数：$\|x\|\triangleq\sqrt{(x,x)}$

（正定、齐显然，三角不等式证明如下：

需证：$\|x+y\|^2\leq\|x\|^2+2\|x\|\cdot\|y\|+\|y\|^2$

有：$\|x+y\|^2=(x+y,x+y)=\|x\|^2+\|y\|^2+2(x,y)$　□.

范数 $\|\cdot\|$ 诱导的距离：$d(x,y)=\|x-y\|$　　度量空间：$d: M\times M\mapsto[0,\infty)$.

完备、Cauchy 列：度量空间点列 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，s.t. $j,k>N$ 有：

$d(x_j,x_k)<\varepsilon$.

度量空间完备指：每个 Cauchy 列收敛.

① $(\mathbb{R}^n,|\cdot|)$，$(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_p)$ 完备.

紧致：度量空间 (M,d) 的子集 E 为紧致的，指 E 中任意点列 $\{x_1,x_2\cdots\}$ 有

极限点属于 A

$\hookrightarrow$ $\{x_n\}$ 的极限点指存在 $\{x_{n_k}\}$ 收敛到 x

连续：(M,d_M)，(N,d_N) 为两度量空间，$f: M\mapsto N$，f 为连续当：

1°) $\forall x_0\in M$，$\forall \varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $d_M(x,x_0)<\delta$ 时，$d_N(f(x),f(x_0))<\varepsilon$

2°) M 中任意收敛点列 $\{x_k\}$，N 中点列 $\{f(x_k)\}$ 收敛

3°) N 的任意开集 B 的原像 $f^{-1}(B)$ 为 M 的开集.

1°) ⇒ 2°) 设 $\{x_k\}$ 为 M 的收敛子列，$x_k\to x\ (k\to\infty)$.

则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $d_M(x_k,x)<\delta$ 时，$d_N(f(x_k),f(x))<\varepsilon$.

故 k 充分大时，$d_M(x_k,x)<\delta \Rightarrow d_N(f(x_k),f(x))<\varepsilon \Rightarrow \lim_{k\to\infty} f(x_k)=f(x)$

2°) ⇒ 3°). 设 $A\subset N$ 为开子集，$x\in f^{-1}(A)$ 要证：$\exists r>0$，$B_r(x)\subset f^{-1}(A)$.

不然，对 $\forall k\in N$，$B_{1/k}(x)$ 不包含于 $f^{-1}(A)$，取 $x_k\in B_{1/k}(x)\setminus f^{-1}(A)$，$k=1,2\cdots$

得到 M 的点列 $\{x_k\}$，其收敛到 x，则 $d_N(f(x_k),f(x))\mapsto 0$，但 $f(x)\in A$ 为开

$\exists\varepsilon>0$，$B_\varepsilon(f(x))\subset A$. k 充分大时，$f(x_k)\in B_\varepsilon(f(x))\subset A$，与 x_k 取法矛盾.

3°) ⇒ 1°). 设 $x_0\in M$，$\forall\varepsilon>0$，$f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0)))$ 为 M 的开集，且 $x_0\in f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0)))$

$\exists\delta>0$，$B_\delta(x_0)\subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0)))$.

压缩映射：(M,d) 为度量空间，映射 $\varphi: M\mapsto M$ 为压缩映射，指：$\exists\, 0<r<1$，s.t.

$$d_M(\varphi(x),\varphi(y))\le r\,d_M(x,y).$$

<u>完备度量</u>空间 M 的<u>压缩映射</u>：$f: M\mapsto M$，存在唯一 $x_0\in M$，$f(x_0)=x_0$.

取点 $x\in M$，考虑点列 $\{f(x), f^2(x)\cdots\}$，其中：$f^n=f\circ f^{n-1}$，证明其为 Cauchy 列.

则由于完备性知其存在极限.

由压缩映射：
$$d(f^{(n+1)}(x),f^{(n)}(x))\le r\,d(f^{(n)}(x),f^{(n-1)}(x))$$
$$\le r^n d(f(x),x)$$

则由距离的三角不等式性质，$m>n$ 有：

$$d(f^{(m)}(x),f^{(n)}(x))\le d(f^{(m)}(x),f^{(m-1)}(x))+d(f^{(m-1)}(x),f^{(m-2)}(x))+\cdots+d(f^{(n+1)}(x),f^{(n)}(x))$$
$$\le (r^{m-1}+r^{m-2}+\cdots+r^n)\,d(f(x),x)$$
$$\le \frac{r^n}{1-r}d(f(x),x)\mapsto 0\quad (n\to\infty)$$

则 $\exists\, x_0=\lim_{n\to\infty}f^n(x)$

由 f 连续. $f(x_0)=f(\lim_{n\to\infty}f^{(n)}(x))=\lim_{n\to\infty}f^{(n+1)}(x)=x_0$

唯一性：设有 x_0, x_1，则：$d(x_0,x_1)=d(f(x_0),f(x_1))\le r\,d(x_0,x_1)$.