数学分析B2习题课

第二次、第三次作业讲解

一些拓展

第二次作业

旋转曲面

设在 yz 平面上给定一条曲线

$$L:\begin{cases}F(y,z)=0\ (y>0)\\ x=0\end{cases}$$

在绕 z 轴旋转时所形成的圆

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0.$$

如果 L 绕 y 轴旋转, 所得旋转面的方程为

$$F(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0.$$

不可能绕x轴转

二次曲面分类

圆柱面: $\sqrt{x^2+y^2}=c,$ 或 $x^2+y^2=c^2,$

椭圆柱面:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

双曲柱面:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

抛物柱面:

$$y^2=2px,$$

旋转椭球面:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1,$$

椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\quad(a>0,\ b>0,\ c>0),$$

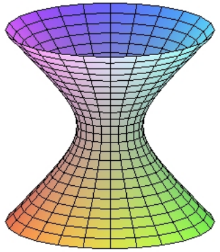
单叶双曲面与双叶双曲面

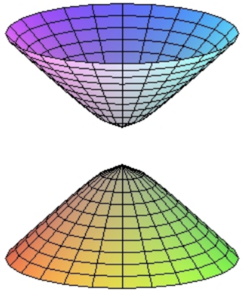
单叶双曲面:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\quad a>0,\ b>0,\ c>0$$

双叶双曲面:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,\quad a>0,\ b>0,\ c>0$$





二次锥面:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,\quad a>0,\ b>0,\ c>0$$

椭圆抛物面:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z,\quad a>0,\ b>0$$

双曲抛物面（马鞍面）:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$$

8.4节

平移产生1次项；旋转产生交叉项

11. 分别求单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

和双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

的一个参数方程表示.

$$\begin{cases} x = a\cosh u\cos v \\ y = b\cosh u\sin v \\ z = c\sinh u \end{cases} \qquad u\in\mathbb{R},\ \ v\in[0,2\pi)$$

$$x = a\cdot\sec u\cos v$$
$$y = b\cdot\sec u\sin v$$
$$z = c\cdot\tan u.$$

9.1节

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\dfrac{\sin xy}{x}$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\dfrac{\sin xy}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\dfrac{\sin xy}{xy}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}y=a$

(7) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x+y)}$;

存在。

注意到，存在 $M>0$，使得

$$e^{x+y}\geq(x+y)^4\geq x^4+2x^2y^2+y^4,\ x+y>M$$

因此

$$0\leq\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-x-y}\leq\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\frac{x^2+y^2}{(x+y)^4}\leq\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\frac{x^2+y^2}{x^4+2x^2y^2+y^4}=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\frac{1}{x^2+y^2}=0$$

9.1节

(9) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$;

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(\sqrt{xy+1}+1\right) = 2$$

(10) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$;

不存在。

事实上，$y=0$ 时原式恒为 0。而取 $y=-x+x^2$，则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=-x+x^2}} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^3-x^2+1}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-x+1}+1} = -\frac{1}{2} \neq 0$$

故极限不存在。

9.1

15. 若 $x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi$, 问沿怎样的方向 $\varphi(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$, 下列极限存在.

(1) $\lim\limits_{\rho\to0^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2-y^2}}$; (2) $\lim\limits_{\rho\to+\infty}\mathrm{e}^{x^2-y^2}\cdot\sin 2xy$.

由

$$e^{\frac{1}{x^2-y^2}}=e^{\frac{1}{\rho^2\cos 2\varphi}}$$

知，极限存在当且仅当

$$\varphi\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right)$$

由

$$e^{x^2-y^2}\sin 2xy=e^{\rho^2\cos 2\varphi}\sin\left(\rho^2\sin 2\varphi\right)$$

知，极限存在当且仅当

$$\varphi\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right)\cup\{0,\pi\}$$

9.1

18. 证明函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2>0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 沿着过此点的每一射线 $x=t\cos\alpha,\ y=t\sin\alpha,\ (0\leqslant t<+\infty)$ 连续, 即 $\lim\limits_{t\to 0}f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=f(0,0)$. 但此函数在点 $(0,0)$ 并不连续.

证明. 注意到 $\cos\alpha=0$ 时，$f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=f(0,t)=0$。

$\cos\alpha\neq 0$ 时，对于 $t\neq 0$ 有

$$f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=\frac{t^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^4\cos^4\alpha+t^2\sin^2\alpha}=\frac{t\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^2\cos^4\alpha+\sin^2\alpha}\Longrightarrow\lim_{t\to 0}f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=0=f(0,0)$$

另一方面，取 $y=x^2$，则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^2}}f(x,y)=\frac{1}{2}\neq 0$$

这说明 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不连续。 $\square$

第三次作业

9.2

4. 设 $f(x,y)=\begin{cases} y\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0. \end{cases}$ 考察函数 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 的偏导数.

解 $f'_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0-0}{\Delta x}=0$

$f'_y(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta y\sin\frac{1}{(\Delta y)^2}-0}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\sin\dfrac{1}{(\Delta y)^2}$ 不存在.

16. 证明函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 连续且偏导数存在, 但在此点不可微.

证明. 由

$$0\le \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\le \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{|x|}{2}=0$$

知 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 连续。

进一步，$(0,0)$ 处偏导数

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\bigg|_{y=0}=0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{x^2+y^2}\bigg|_{y=0}=0$$

在 $(0,0)$ 均存在。

另一方面，假设可微，则极限

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

存在；但是

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}}\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}}\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

矛盾！

15. 根据可微的定义证明，函数 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在原点处不可微

证：$f'_x(0,0)=(0)'|_{x=0}=0$，$f'_y(0,0)=(0)'|_{y=0}=0$

$$\lim_{\rho\to0}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)\Delta x-f'_y(0,0)\Delta y}{\rho}=\lim_{\rho\to0}\frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}\overset{y=kx}{=\!=}\lim_{x\to0}\sqrt{\frac{|k|}{1+k^2}}=\sqrt{\frac{|k|}{1+k^2}}$$

极限不存在，故 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在原点处不可微！

16. 证明函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 连续且偏导数存在, 但在此点不可微.

证明. 由

$$0\le \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\le \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{|x|}{2}=0$$

知 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 连续。

进一步，$(0,0)$ 处偏导数

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{xy}{x^2+y^2}\bigg|_{y=0}=0\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{y^2}{x^2+y^2}\bigg|_{y=0}=0$$

在 $(0,0)$ 均存在。

另一方面，假设可微，则极限

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

存在，但是

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=0}}\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=0$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=x}}\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

矛盾！ $\square$

1. 证明下列方程在指定点的附近对 y 有唯一解，并求出 y 对 x 在该点处的一阶和二阶导数

(1) $x^2+xy+y^2=7$, 在 $(2,1)$ 处.　(2) $x\cos xy=0$, 在 $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$ 处.

证 (1) 令 $F(x,y)=x^2+xy+y^2-7$ ， $M_0(2,1)$

$$\begin{cases} F'_x=2x+y \\ F'_y=x+2y \end{cases} \Rightarrow \text{易得 } F(x,y)\in C^1(D)$$

$F(2,1)=4+2+1-7=0$ ， $(2,1)\in D$

$F'_y(2,1)=2+2=4\neq 0$

$\Rightarrow$ $\exists\,\delta>0$, 方程 $F(x,y)=0$ 在 $U(M_0,\delta)$ 中确定唯一隐函数 $y=\varphi(x)$.

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2,1)}=-\frac{F'_x(2,1)}{F'_y(2,1)}=-\frac{2\times2+1}{2+2\times1}=-\frac{5}{4}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{2x+y}{x+2y}\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\left(2+\frac{dy}{dx}\right)(x+2y)-(2x+y)\left(1+2\frac{dy}{dx}\right)}{(x+2y)^2}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{(2,1)}=-\frac{\left(2-\frac{5}{4}\right)\times4-5\times\left(1-2\times\frac{5}{4}\right)}{16}=-\frac{21}{32}$$

问题反馈

- 对于 $u = f$ 形的函数求各阶偏导数，最终的结果不应带 u，而应该带 f；
- 以习题 9.2 的 20(4) 为例，f 的偏导那项，**一定不能**写成 $\frac{\partial f}{\partial(x+y+z)}$。一种写法是单独设出新变量 $\xi = x + y + z$，然后分母改为 ξ；另一种写法是直接 f_1，意为对第一分量求导。

补充1：深度学习回归问题损失函数

平均绝对误差(Mean Absolute Error，MAE)是对估计值和真实值之差取绝对值的平均值:

$$\mathrm{MAE} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i) - y_i\right|$$

均方误差(Mean Square Error，MSE)是对估计值和真实值之差取平方和的平均值。

$$\mathrm{MSE} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - y_i)^2$$

Smooth Mean Absolute Error Loss 。其原理很简单，就是在误差接近0时使用MSE，误差较大时使用MAE

$$J_{\text{huber}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbb{I}_{|y_i-\hat{y}_i|\leq\delta}\frac{(y_i-\hat{y}_i)^2}{2} + \mathbb{I}_{|y_i-\hat{y}_i|>\delta}\left(\delta\left|y_i-\hat{y}_i\right| - \frac{1}{2}\delta^2\right)$$

补充2：深度学习分类问题损失函数

交叉熵损失函数：

考虑二分类，在二分类中我们通常使用Sigmoid函数将模型的输出压缩到$(0,1)$区间内，$\hat{y}_i \in (0,1)$，用来代表给定输入x_i，模型判断为正类的概率。由于只有正负两类，因此同时也得到了负类的概率：

$$p\left(y_i=1 \mid x_i\right)=\hat{y}_i$$

$$p\left(y_i=0 \mid x_i\right)=1-\hat{y}_i$$

将两条式子合并成一条：

$$p\left(y_i \mid x_i\right)=\left(\hat{y}_i\right)^{y_i}\left(1-\hat{y}_i\right)^{1-y_i}$$

假设数据点之间独立同分布，则似然可以表示为：

$$L(x, y)=\prod_{i=1}^N\left(\hat{y}_i\right)^{y_i}\left(1-\hat{y}_i\right)^{1-y_i}$$

对似然取对数，然后加负号变成最小化负对数似然，即为交叉熵损失函数的形式：

$$NLL(x, y)=J_{CE}=-\sum_{i=1}^N y_i \log \left(\hat{y}_i\right)+\left(1-y_i\right) \log \left(1-\hat{y}_i\right)$$

补充2：深度学习分类问题损失函数

5.2 多分类：

在多分类的任务中，交叉熵损失函数的推导思路和二分类是一样的，变化的地方是真实值y_i是一个One-hot 向量，同时模型输出的压缩由原来的Sigmoid函数换成Softmax函数。Softmax 函数将每个维度的输出范围都限定在$(0,1)$之间，同时所有维度的输出和为1，用于表示一个概率分布

$$p\left(y_i|x_i\right)=\prod_{k=1}^{K}\left(\hat{y}_i^k\right)^{y_i^k}$$

其中，$k\in K$表示K个类别中的一类，同样的假设数据点之间独立同分布，可得到负对数似然为：

$$NLL(x,y)=J_{CE}=-\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}y_i^k\log\left(\hat{y}_i^k\right)$$

由于y_i是一个One-hot向量，除了目标类为1之外其他类别上的输出都为 0，因此上式也可以写为：

$$J_{CE}=-\sum_{i=1}^{N}y_i^{c_i}\log\left(y_i^{\hat{c}_i}\right)$$