第一次习题课讲义

于俊骜

2024 年 3 月 9 日

目录

1 课程综述

狭义的“微积分”到数分 (B1) 的第五章**定积分**就结束了，所以在座的各位都已经掌握了微积分（笑）。(B2) 中的所有内容，都是对 (B1) 的推广。

1.1 从一元到多元——多变量微积分

将微积分推广到多变量的直接原因是，我们生活在三维空间，一旦涉及到高维，经典力学玩的那套平地或斜面推滑块、滚小球的理论就失效了。

完全相同地，我们可以模仿单变量微积分的思路，建立多变量微积分的理论。

1.1.1 极限与范数

无论怎样的极限，都可以用 $\varepsilon-\delta/N$ 语言描述，即“只要自变量离得够近，那函数值也得很近”。唯一不同的是，多变量的研究对象从“数”变成了“点”，不再存在“绝对值”概念。

事实上对于向量，我们可以用向量的**模长**代替绝对值，来描述两点间距。特别地，一维的模长就是绝对值。因此，对于最一般的，从 m 维空间映到 n 维空间的函数 $\mathbf{f}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$，它在 $\mathbf{x}_0$ 处的极限为 $\mathbf{y}_0$ 描述为

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\ \text{s.t. } |\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|<\delta\Longrightarrow|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{y}|<\varepsilon$$

其中前者为 m 维向量的模长，后者为 n 维向量的模长。

进一步，我们还可以将模长推广为**范数**。此时，我们需要保留一些模长原有的性质，才知道定义的也是“模长”。

定义 1 (范数)**.** *若线性空间 X 上的一个函数 $\|\cdot\|: X\to[0,+\infty)$ 满足*

1. *正定性：$\|x\|\geq 0$，且等号成立当且仅当 $x=0$*
2. *齐次性：对于 $\lambda\in\mathbb{R}$，有 $\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|$*
3. *三角不等式：$\|x\|+\|y\|\geq\|x+y\|$*

则称它是 X 上的一个范数。

n 维欧氏空间中最常见的范数称为 p **范数**，即

定义 2 (p 范数)**.** 对于 n 维向量 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，它的 p 范数定义为

$$\parallel \mathbf{x} \parallel_p = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

特别地，当 $p\to+\infty$ 时，还可以得到**无穷范数**

$$\parallel \mathbf{x} \parallel_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|$$

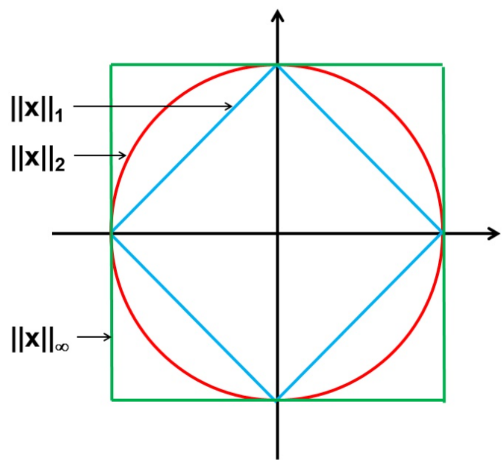

图 1: 范数示意图

注 1. 不难发现 1 范数是所谓**直角距离**，而 2 范数就是我们熟知的**欧式距离**，也即模长。至于它们为什么满足范数的三条性质，感兴趣的同学可以自己验证。

至此，将前面极限表述中的模长升级为范数，我们就得到了“极限”这一概念的最一般表述，进而可得到**连续**函数的定义。

1.1.2 求导与微分

在单变量中，求导是“差商的极限”。但由于向量不能做分母，这种方法只能在直线上定义导数。因此，最直接的想法就是先沿着某一条直线定义导数。

定义 3 (方向导数)**.** 设 $\mathbf{x}$ 是欧氏空间中一点, $\mathbf{u}$ 是一个单位向量, $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 是实值函数，则

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{x})}{t}$$

存在时，称它为 $\boldsymbol{x}$ 处沿 $\boldsymbol{u}$ （所在直线的）的方向导数。

注 2. 若 $\mathbf{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_m)$ 为向量值函数，则可以对每一个分量定义方向导数。

特别地，沿坐标轴的方向导数称为偏导数。

定义 4 (偏导数)**.** f 沿着 x_i 轴的偏导数为

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{y})=\lim_{t\to 0}\frac{f(\mathbf{y}+t\mathbf{e}_i)-f(\mathbf{y})}{t}$$

不难发现，这 n 个偏导数看起来就像是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基，如果所有方向导数可以构成一个类似**线性空间**的结构，那么任意方向导数都可以写成这 n 个偏导数的线性组合，这时候就方便得多了。

定义 5 (微分)**.** f 在 y 处的微分定义为

$$df=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx_i$$

它描述了一点处的线性近似。

一点处没有统一的“导数”概念，故多变量中没有“可导”，只有可微。

定义 6 (可微)**.** f 在 $\mathbf{y}$ 处可微是指

$$f(\mathbf{y})-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{y})h_i=o(|\mathbf{h}|),\ |\mathbf{h}|\to 0$$

而 f 的可微性有如下推导关系：

定理 1. 对于 $\mathbf{x}_0\in\mathbb{R}^n$

$$f\text{的所有偏导数在 }\mathbf{x}_0\text{ 连续}\Longrightarrow f\text{在 }\mathbf{x}_0\text{ 可微}\Longrightarrow\begin{cases}f\text{在 }\mathbf{x}_0\text{ 连续}\\ f\text{在 }\mathbf{x}_0\text{ 的所有偏导数存在}\end{cases}$$

这里也能看出，为什么在单变量的时候就更强调“连续可导”而非仅仅“可导”。连续可导的另一个好处是求偏导可以随意换序。

注 3. 上面的推导都是单向的，其他方向**均存在反例**。比如函数

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & y=x^2, x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

在原点处的两个偏导数均存在且为 0，但 f 在原点甚至不连续。

1.1.3 重积分

和单变量一样，我们仍然想通过 Riemann 和定义积分。只要函数足够“规整”使其可积，我们的的难点落在了“分割”这一步上。实轴上，我们可以将积分区域分成小区间。类似地，高维的积分是在闭的矩形、长方体这样的集合上定义的。接下来，只要集合够好，那么用这些形状去逼近整个集合，就得到了这个集合上的积分。

注 4. 多变量时没有“不定积分 *(antiderivative)*”这一概念，因为微积分基本定理**不再成立**。

通过定义去算积分基本是不现实的。我们的方法是让被积函数够好，使得一个 n 重积分能够写成 n 个单变量积分，再去使用微积分基本定理。

1.2 从平直到弯曲——曲线曲面积分

分析的本质是线性逼近。我们已经能在欧式空间上做积分，那么在弯曲的空间上积分，最直接的想法是局部“拉直展平”。

以下我们只讨论数量场的积分，向量场的积分想法类似。

1.2.1 曲线积分

一维空间没有非平凡的内蕴几何，任何一条曲线都可以**等距**地变换为直线，具体操作就是拉直。因此，我们要做的就是把曲线的参数方程带回到积分式中，得到

$$\int_\Gamma f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^T f(r(t))r'(t)\,\mathrm{d}t$$

这里的 $r'(t)$ 就可以看作在“拉直”的过程中伸缩比例系数。特别地，如果曲线选取弧长参数化，那么这一项就是 1。此时，拉直的过程不进行伸缩，此即等距的一个直观感受。

当然，曲线积分的严格定义仍然是对曲线“分割、求和、取极限”，道理完全相同。

1.2.2 曲面积分

与曲线不同的是，曲面存在非平凡内蕴几何。比如球面不可能等距地变为平面，就像地球仪上的贴纸不能平展开贴在白纸上。这种情况下，就不能像曲线一样选取合适的参数，使得它化成一个平面积分的常数倍。

更困难的一点是，如果想通过"分割、求和、取极限"的方式定义积分的话，甚至对于包括圆柱面在内的性质很好的曲面，它最后一步的极限可能也是不存在的。因此，我们只能形式化地将曲面积分定义为

$$\iint_{\Sigma} f(\mathbf{r})\,\mathrm{d}S = \iint_{D} f(\mathbf{r}(u,v))|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

可以验证该定义与平面相容，且对换元成立。

1.2.3 广义 Stokes 公式

不是微积分基本定理用不起，而是 Stokes 更有性价比。既然微积分基本定理不成立，那我们自然想找个替代品。

微积分基本定理的本质是**积分求导互逆**，因此对于重积分，一个比较直接的想法是把被积函数以合适的方式"微分"一下，然后把积分增加一重（真・积分要积到九重）。

在二维体现为 **Green 公式**（沿平面区域边界积一圈等于某些偏导数在区域上的积分），在三维体现为 **Gauss 公式**（沿空间区域表面积一圈等于某些偏导数在区域上的积分）和狭义 **Stokes 公式**（沿**曲面**边界积一圈等于旋度在曲面上的积分）。

最后它们都归结为

定理 2 (广义 Stokes 公式)**.** *设 Ω 是一个单连通区域，ω 是一个函数，则*

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega$$

注 5. *当 Ω 取实轴上的闭区间时，广义 Stokes 公式退化成了微积分基本定理。"昨天你对我爱理不理，今天我让你高攀不起"。*

1.3 从一般到特殊——Fourier 级数

数分 (B1) 中我们学到了级数的一般理论。这里，我们对于周期函数，研究一种全新的级数：Fourier 级数。

我们之前最常见的周期函数是三角函数，那么对于一般周期函数，能不能把它写成三角函数的之多可数线性组合？

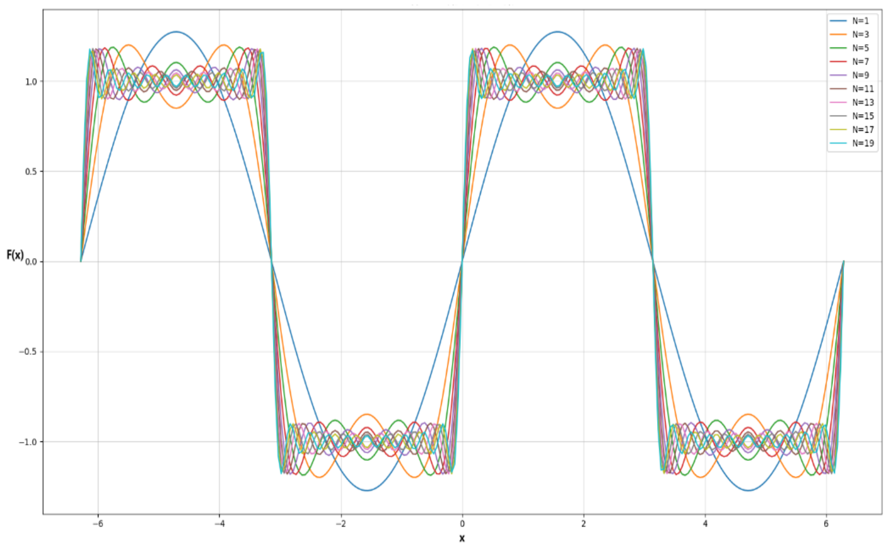

图 2: 周期函数分解为三角函数

定义 7 (L^2 内积). L^2 空间（平方可积函数空间）中的内积定义为

$$(f,g)=\int fg$$

在这种新的内积意义下，集合

$$\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots\}$$

中的元素两两正交。于是，它们可以作为一组正交基，张成一个无穷维线性空间，这是一个函数空间。周期函数在上面的投影就是 Fourier 级数。

我们肯定希望能如同向量坐标表示一样，将 Fourier 级数和原函数划等号。但对不起，做不到！

事实上，就算一个函数的 Fourier 级数存在，它也不一定收敛于原函数，甚至不一定收敛。Fourier 级数的逐点收敛、积分收敛等问题是早期**调和分析**的重要研究对象。不过这门课中，我们会给 f 加上一些“强有力的”正则性条件，使 Fourier 级数逐点收敛到原函数的**左右极限平均值**。

Fourier 分析的另一个重要课题是 **Fourier 变换**。但完整版的 Fourier 变换高度依赖于复分析和测度论。所以，对于数分 (B2)，会算就行。

1.4　从离散到连续——积分的敛散性

级数是离散的求和，积分是连续的求和。因此，积分（无穷积分与瑕积分）的敛散性判别法应当和级数如出一辙。事实的确如此，数项级数与反常积分、函数项级数与含参变量积分的理论完全对应。

除此之外，通过添加参数的方法，我们可以计算诸如 **Gauss 积分**、**Fresner 积分**等无法用初等方法算出来的积分。

进一步，我们在 (B1) 中学到常义积分可以定义函数，那广义积分必然也可以。通过这种方式，我们可以将阶乘光滑延拓到 **Gamma 函数**。另一个 **Beta 函数**本质上也是 Gamma 函数，可用于简化一类三角积分的计算。

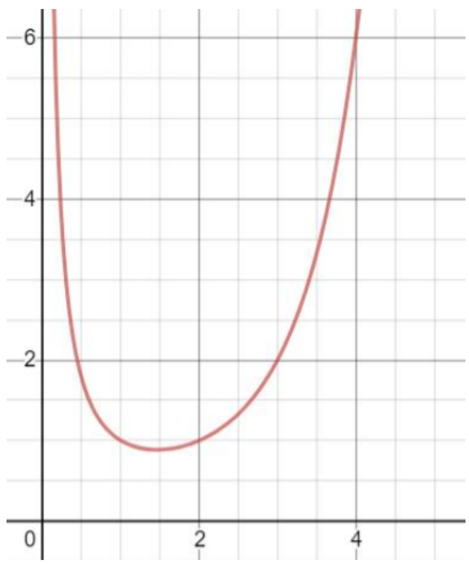

图 3: Gamma 函数图像

2 第八章回顾

2.1 公式汇总

叉乘的定义 设 $\mathbf{a}=(x_1,y_1,z_1),\mathbf{b}=(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=(y_1z_2-y_2z_1,z_1x_2-z_2x_1,x_1y_2-x_2y_1)$$

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\mathbf{a},\mathbf{b})$$

其几何意义为平行四边形的**有向面积**。注意以此方法求三角形面积要除以2。

注 6. 叉乘运算是**反对称**的，注意交换时要加负号。

Lagrange 公式

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c}$$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$$

混合积

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=\mathbf{c}\times\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\times\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}$$

其几何意义为平行六面体的**有向体积**。注意以此方法求四面体体积要除以6。

方向余弦 对于向量 $\mathbf{a}=(x,y,z)$，其三个方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}}{|\mathbf{a}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\beta=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{j}}{|\mathbf{a}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\gamma=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{k}}{|\mathbf{a}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

直线方程　过 (x_0, y_0, z_0)，方向向量为 (a, b, c) 的直线方程可写作以下形式

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

$$r(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$$

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

也可以写成两平面交线的形式，这时候方向向量为两平面法向量的叉乘。

注 7. 这里的第一行的形式特指 $abc \neq 0$ 的情形，若某一项为 0，比如 $c = 0$，则去掉该项，另写一行 $z = z_0$。

平面方程

$$ax + by + cz + d = 0$$

其法向量为 (a, b, c)，且注意到“哪项系数为 0 平面就与哪个轴平行”。

注 8. 二次曲面的分类的知识点直接归在本讲义的第三部分。

旋转曲面　绕坐标轴得到的旋转曲面方程形如

$$\text{绕 } x \text{ 轴：} F(x, \sqrt{y^2 + z^2}) = 0$$

$$\text{绕 } y \text{ 轴：} F(y, \sqrt{z^2 + x^2}) = 0$$

$$\text{绕 } z \text{ 轴：} F(z, \sqrt{x^2 + y^2}) = 0$$

2.2　解题技巧

以下 $\mathbf{n}$ 表示平面的法向量，$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 表示直线的方向向量。

2.2.1　求方程

平面　想办法算出法向量 (a, b, c)，设平面方程为 $ax + by + cz + d = 0$，再利用其余条件求出 d。

直线　想办法求出方向向量，再利用其余条件得到直线上一点即可。

2.2.2 求夹角

两平面夹角 即法向量夹角及其补角。

直线与平面夹角

$$\theta = \arcsin \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{a}||\mathbf{n}|}$$

2.2.3 求距离

点到平面的距离

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

两平行平面的距离

$$\frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

两平行直线的距离 在两直线上各取一点 M, N，则距离为

$$\frac{|\overrightarrow{MN} \times \mathbf{a}|}{|\mathbf{a}|}$$

注 9. 即平行四边形的高为面积除以底。

两异面直线的距离 在两直线上各取一点 M, N，则距离为

$$\frac{|\overrightarrow{MN} \times \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}$$

注 10. 即平行六面体的高为面积除以底面积。

2.2.4 求投影

点在直线上的投影 待定系数设出直线上一点，再利用内积为 0，得到投影。

直线在平面上的投影 投影的方向向量为

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{a})$$

若直线与平面相交，则代入交点；若平行，则在平面上设出一点，与原直线上一点连线，得到的向量垂直于 $\mathbf{n} \times \mathbf{a}$。

3 专题：矩阵变换与解析几何

为了更明确地表达几何意义，这里我们只讨论**三阶方阵**，其余阶数的理论完全相同。

根据线性代数惯例，这一部分的向量均写成列向量。

3.1 矩阵的几何意义

无论线代 (B1) 还是王新茂的线代 (A1)，都会把矩阵当成一个数表，定义一堆复杂的概念和运算。但线性代数不应该这么粗浅。（学了两年线代后，我逐渐理解了一切！）

我们首先严格定义线性空间中的线性变换

定义 8 (线性变换)**.** *设 $\mathcal{A}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 满足*

$$\mathcal{A}(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}) = \lambda\mathcal{A}(\mathbf{a})+\mu\mathcal{A}(\mathbf{b}) \ \ \forall\,\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^n,\ \ \lambda,\mu\in\mathbb{R}$$

则称 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个线性变换。

直观上看，线性变换可以进行伸缩、旋转、剪切等操作。如果发空间画上网格，则变换前后网格间平行关系不变，且间距相等。

事实上，我们有更简单的描述。注意到线性空间中的点可以用基向量**唯一线性表示**。因此线性变换就是在**变换基向量**。不难验证为了符合线性变换的定义，线性变换能且只能动基向量，前面乘的参数 λ,μ 动不了一点（还不能理解的话可以看下面具体的例子）。

下面开始具体计算。如果线性变换 $\mathcal{A}$ 将基向量 $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ 依次变为 $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)^T,\mathbf{b}=(b_1,b_2,b_3)^T,\mathbf{c}=(c_1,c_2,c_3)^T$，则任意向量 $\mathbf{v}=(x,y,z)^T$ 有

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\mathbf{v}) &= \mathcal{A}(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}) = x\mathcal{A}(\mathbf{i})+y\mathcal{A}(\mathbf{j})+z\mathcal{A}(\mathbf{k}) \\ &= x\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = A\mathbf{v}\end{aligned}$$

其中 $A=(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})^T$。

从 $\mathbf{v}$ 的任意性，我们可以看出，方阵左乘向量就是对向量的一个线性变换。因此，方阵可以视为欧氏空间的一个向量值的“线性函数”，它将一个向量线性地打到另一个向量。

进一步，矩阵相乘就是线性变换的复合。我们知道函数复合具有结合律但不具有交换律，这也就是了为什么矩阵乘法可以结合不能交换。

3.2 矩阵与几何变换

3.2.1 行列式与可逆性

个人认为“行列式”是一个比较糟糕的翻译，它只保留了一个很次要的性质——转置不变性，而忽略了行列式 (determinant) 的几何意义。

在三维欧式空间中，考虑一个正方体 $[0,1]^3$，由线性性知，它被一个方阵作用后，还是一个平行六面体。这个平行六面体的有向体积是

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \det A$$

因此，三阶矩阵的行列式表示的是用这个矩阵进行线性变换后，一个三维图形的体积会被放大多少倍。这里我们可以看到

$$\det(AB) = \det A \det B$$

进一步地，如果一个三维图形体积被放大或缩小有限倍，那么取个倒数它是完全可能复原的。然而一旦放大 0 倍，这个图形就被降为打击成二维、一维甚至 0 维。此时覆水难收，不可能再用线性的方法将它复原，因此

定理 3. *方阵可逆当且仅当行列式非零。*

3.2.2 相似与相抵

定义 9 (矩阵的相似)**.** *对于矩阵 A, B,若存在可逆方阵 P,使得 $A = P^{-1}BP$,则称 A 与 B 相似。*

我们知道可逆方阵是可逆线性变换，因此相似的几何意义是“变过去 $\to$ 操作 $\to$ 变回来”。通过这种方式，我们有可能将原方阵相似到一个简单的方阵，也就是将坐标系改变一下，在新的坐标系中进行一个很简单的几何变换，再把坐标系变回来。

注 11. *不是方阵的矩阵，视为线性变换时，会改变空间的维数，因此第三步坐标系拉不回来。这说明只有方阵能相似。*

相抵则更加一般，区别于相似，它在第三步不要求“以同样方式”把坐标系拉回来，因此可对任意矩阵做。

定义 10 (矩阵的相抵). 对于矩阵 A, B，若存在可逆方阵 P, Q，使得 $A = PBQ$，则称 A 与 B 相抵。

根据线性代数理论，任何方阵可相抵为标准型，即

$$A = P \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q$$

这说明在适当的坐标变换下，A 相当于前 r 个分量不变，其他分量被“压扁”。换句话说，矩阵的**秩**的几何含义，就是这个矩阵会把一个 n 维的图形降维打击到 r 维。

3.2.3 特征值与特征向量

定义 11 (特征值与特征向量). 若 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$，则称 λ 为 A 的一个**特征值**，而 x 称为 λ 对应的**特征向量**。

前面提到，线性变换有很多种。但我们最想看到、最规整的一种就是对于向量“只伸缩不旋转”。特征向量所在的方向，便有这么好的性质，特征值就是伸缩的倍数。

注 12. 这个方向伸长 λ_1 倍，那个方向伸长 λ_2 倍…… 最终，很直观地看出 n 维体积就增大了 $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$ 倍，这也是为什么**行列式等于各个特征值的乘积**。

3.2.4 二次型的正交相似

进一步，线性变换有没有可能做到“刚体运动”的效果（保长度且保角）呢？答案是**肯定**的。

注 13. 这里的刚体运动包含了“反向刚体”，即不要求保右手系。

前面知道，线性变换本质是对基向量的变换。要保证刚体运动，我们只需让变换后的基向量也是标准正交的就好，也即矩阵的行向量标准正交。

定义 12 (正交方阵). 若 $PP^T = I$，则称 P 是一个正交方阵。

这个定义与“矩阵行向量标准正交”等价，这是因为

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{a}^T \\ \mathbf{b}^T \\ \mathbf{c}^T \end{pmatrix} \iff PP^T = \begin{pmatrix} \mathbf{a}^T\mathbf{a} & \mathbf{a}^T\mathbf{b} & \mathbf{a}^T\mathbf{c} \\ \mathbf{b}^T\mathbf{a} & \mathbf{b}^T\mathbf{b} & \mathbf{b}^T\mathbf{c} \\ \mathbf{c}^T\mathbf{a} & \mathbf{c}^T\mathbf{b} & \mathbf{c}^T\mathbf{c} \end{pmatrix}$$

不难看出等价性。

在三维欧氏空间中，刚体变换体现为平移和旋转。平移可以直接有向量加法得到，而旋转则是乘正交阵。

注 14. 从几何意义可以看出为什么正交阵的行列式只能为 ± 1。

线性代数中有如下定理

定理 4. 任何一个对称阵可以用正交阵相似为 $diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$

该结论可以归纳得到，这里限于篇幅，不进行证明（反正你们之后都会学，欸嘿）。

至此，已成艺术（?）

准备工作全部完成，下面我们可以进行二次曲面的分类。

3.3 二次曲面的分类

定理 5 (空间二次曲面分类定理)**.** 三维欧式空间中的二次曲面只有已命名的九种。

注 15. 我们要求二次项至少一项系数非零。

证明. 设二次曲面为

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

它可写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G & H & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + K = 0$$

由前面定理，存在正交阵 P，使得

$$P^T \begin{pmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{pmatrix} P = P^{-1} \begin{pmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

考虑刚体变换（旋转）

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

并令

$$\begin{pmatrix} G' & H' & J' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G & H & J \end{pmatrix} P$$

于是曲面方程化为

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G' & H' & J' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + K = 0$$

情形一： 若每个系数非零的一次项，对应的二次项的系数都非零：

可以配方得到

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + G'x' + H'y' + J'z' + K \\ &= \lambda_1 \left(x' + \frac{G'}{2} \right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{H'}{2} \right)^2 + \lambda_3 \left(z' + \frac{J'}{2} \right)^2 - M \end{aligned}$$

其中 M 是一个常数。

再进行一次刚体变换（平移）

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' + \frac{G'}{2} \\ y' + \frac{H'}{2} \\ z' + \frac{J'}{2} \end{pmatrix}$$

原方程化为

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 = M$$

这是标准方程，可根据 λ_i 和 M 的符号分类，得到的二次曲面有**椭球面**、**椭圆柱面**、**双曲柱面**、**单叶双曲面**、**双叶双曲面**、**双曲锥面**。

情形二： 若存在某个一次项系数非零，但它对应的二次项消失：

由对称性，不妨设 $\lambda_3 = 0$ 但 $J' \neq 0$。同除以 J'，得到

$$z' = -\lambda_1 x'^2 - \lambda_2 y'^2 - G''x - H''y + K'$$

此时，由于含 z 的只有一个一次项，我们可以随时将曲面沿 z 轴平移，使得常数项消失。

若 $\lambda_1 \lambda_2 = 0$，由于曲面是二次的，它们不能同时为 0，因此不妨设 $\lambda_2 = 0$。此时可沿着 x 轴平移，于是我们可以将方程改写为

$$z'' + H''y'' = -\lambda_1 x''^2$$

最后绕 x 轴旋转 $\theta = -\arctan H''$，即得到**抛物柱面**。

若 $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$，则可配方（平移）得到

$$z'' = -\lambda_1 x'' - \lambda_2 y''^2$$

两个特征值同号则为**椭圆抛物面**，异号则为**双曲抛物面（马鞍面）**。

至此，我们证明了二次曲面有且仅有 9 种 □

注 16. 可以进一步系数更一般的情况，得到包括**空集**、**点**、**直线**、**平面**、**一对平行平面**、**一对相交平面**在内的共 15 种广义二次曲面。

4 拓展：更高雅的几何

4.1 拓扑学 *

公理化的数学是建立在集合论上的。所以，就算具体的几何对象，也是从集合开始的。

4.1.1 拓扑公理

但有一个背景集合肯定是不够的，我们需要在其中找到一些特殊的子集，即“开集”。

定义 13 (拓扑空间)**.** 设 X 是一个非空集合，$\mathcal{O}$ 是 X 的一些子集的集合，满足：

1. $X, \varnothing \in \mathcal{O}$
2. 设 I 是一个指标集，$O_i \in \mathcal{O}, \forall i \in I$，则 $\bigcup_{i\in I} O_i \in \mathcal{O}$
3. $\forall O_1, O_2 \in \mathcal{O}$，有 $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$

则称 $\mathcal{O}$ 为 X 上的一个**拓扑**，$\mathcal{O}$ 中的元素称为该拓扑下的**开集**。二元组 $(X, \mathcal{O})$ 称为一个**拓扑空间**。

注 17. 后两条性质称为**开集公理**。平凡地看出，度量空间中的开集满足该定义，这样的拓扑称为**通常拓扑**。

相较于开集，“邻域”的概念更好理解

定义 14 (邻域公理)**.** 拓扑空间 X 中，非空集合 $\mathcal{N}(X, x)$ 若满足性质

1. $N \in \mathcal{N}(X,x) \Longrightarrow x \in N$

2. $N_1, N_2 \in \mathcal{N}(X,x) \Longrightarrow N_1 \cap N_2 \in \mathcal{N}(X,x)$

3. $N \in \mathcal{N}(X,x), N \subset U \subset X \Longrightarrow U \in \mathcal{N}(X,x)$

4. $N \in \mathcal{N}(X,x) \Longrightarrow \dot{N} = \{z \in X | N \in \mathcal{N}(X,z)\} \in \mathcal{N}(X,x)$

*则称它为 x 的***邻域***。*

注 18. *这里可以看出，我们在数分 (B1) 中经常要强调“小”邻域，因为邻域可以大到是全空间。*

值得一提的是，开集公理和邻域公理定义的拓扑是等价的。与它们等价的还有**闭集公理**和**拓扑基公理**。

拓扑空间是最简单的几何对象，虽然“简陋”但足够发展出一套理论。

4.1.2 连续函数与同胚

在度量空间中，不难验证**连续等价于开集的原像是开集**。后者不依赖于拓扑结构，所以在拓扑空间中，我们将“开集的原像是开集”作为连续函数的定义（也等价于闭集原像是闭集、邻域原像是原像、拓扑基原像是开集）。由此，我们可以定义拓扑学中最重要的等价关系。

定义 15 (同胚)**.** *若 X, Y 两个拓扑空间，连续的一一映射 $f : X \to Y$ 可逆，且逆映射也连续，则称 f 是 X, Y 之间的同胚。此时，称 X, Y 是同胚的。*

形象地看，同胚允许拉伸、扭转、揉捏等，但不允许挖洞、粘连、降维。

包括开集、闭集、紧集、连通、道路连通、基本群、同调群在内的绝大多数拓扑性质都在同胚下保持，所以通常把同胚的拓扑空间视作同一个，比如喜闻乐见的“咖啡杯与甜甜圈”。

这里我们可以提一个有趣的东西：**Peano 曲线**。如图构造一列闭区间到三角形的连续双射，可以证明这列函数一致收敛与一个连续函数 f，由此做到“直线填满平面图形”。但这不意味着它们同胚（更强地，可以证明维数不同的空间不可能同胚）。

采用反证法，在闭区间中间挖掉一个点，则三角形上也会挖掉一个点，它们仍然同胚，但前者不连通、后者连通，矛盾！事实上，最终的 f 连续，但不可逆，因为它不再是单射。

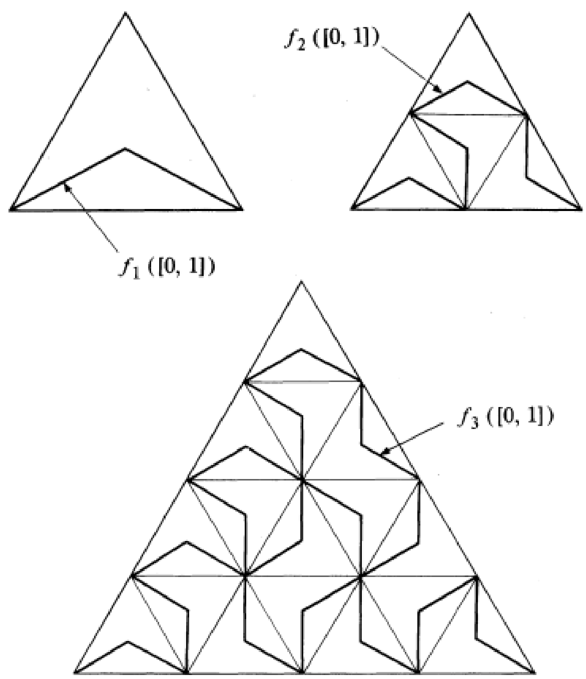

图 4: Peano 曲线

4.1.3 三角剖分与曲面分类

关于拓扑学，最后介绍一个很实用的定理。

定理 6 (紧曲面的三角剖分). 任何一个紧（有界闭）曲面可以剖分成有限个“三角形”。这里的三角形的边可以不是直的。

三角形的好处是，它是最简单的二维多边形，称为**单纯形**。

示例可以参考下图，这个定理保证了使用计算机对曲面进行建模的可行性（比如原神）。对于拓扑学而言，这个定理能够辅助我们将所有紧曲面分类。

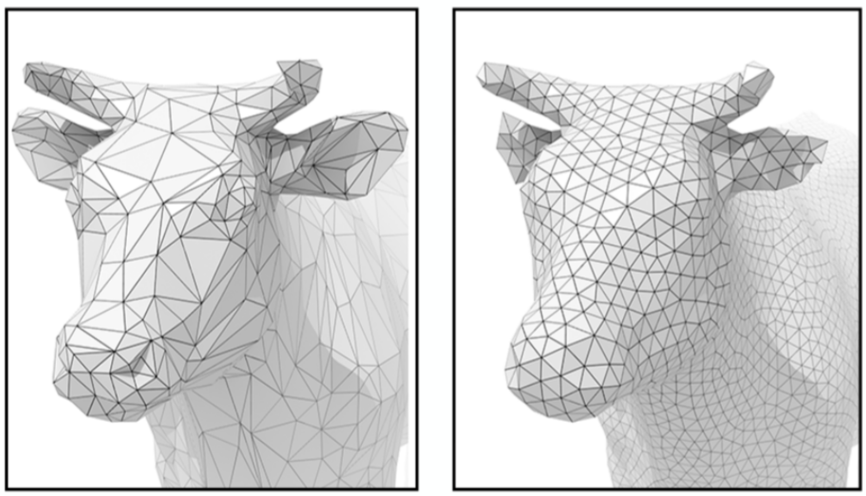

图 5: 三角剖分示例

定理 7 (紧曲面分类定理). 任何一个紧曲面要么同胚于

$$\mathbb{S}^2\#\mathbb{T}^2\#\cdots\#\mathbb{T}^2\backslash\left(\bigcup_{i=1}^{m}\mathbb{D}_i\right)$$

要么同胚于

$$\mathbb{S}^2\#\mathbb{R}P^2\#\cdots\#\mathbb{R}P^2\backslash\left(\bigcup_{i=1}^{m}\mathbb{D}_i\right)$$

其中 $\mathbb{S}^2$ 为球面，$\mathbb{T}^2$ 为环面 *(torus)*，$\mathbb{R}P^2$ 为射影平面，$\mathbb{D}_i$ 为开圆盘。

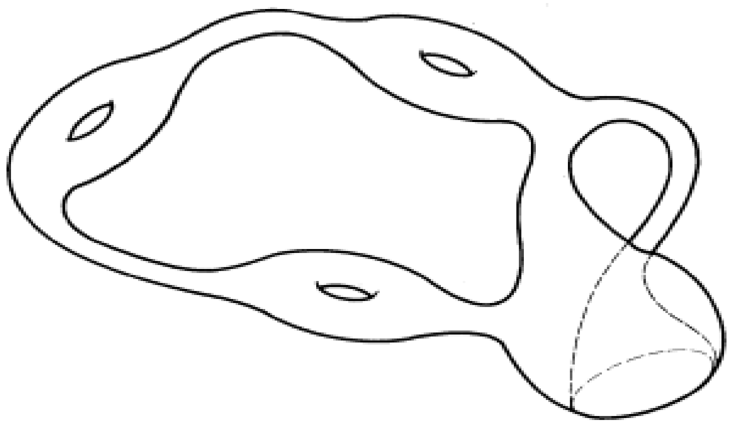

图 6: 一个无边紧曲面

例如上图中的曲面，直观上看，它是 $\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2\#K$，这里 K 是 **Klein 瓶**。在同胚意义下，它可以写成 8 个 $\mathbb{R}P^2$ 的连通和。这里的井号表示连通和，直观上理解，就是把两个曲面各挖去一个洞，再用一条管道连接起来。

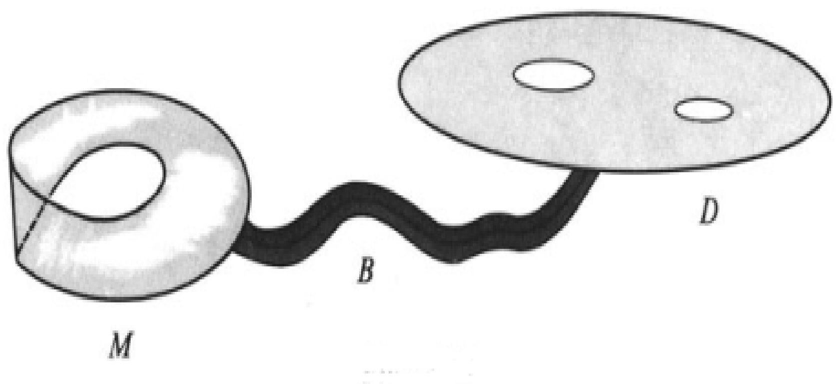

图 7: 连通和示例

有了这里的预备知识，我们就可以引出千禧年七大难题之一：

定理 8 (Poincare 猜想). *若一个拓扑空间同伦于 $\mathbb{S}^n$，则它同胚于 $\mathbb{S}^n$。*

同伦是一个弱于同胚的等价关系，它去掉了同胚中“双射”的要求。比如，圆盘跟一个点是同伦的，却显然不同胚。

值得一提的是，紧曲面分类定理已经可以证明庞加莱猜想的 $n = 2$ 情形，而最难的 $n = 4$ 情形是 Perelman 通过**几何流**的方式证明的。至此，庞加莱猜想已经被证实。

不过它还有一个加强版本，即把同胚加强为**微分同胚**，就是将连续函数升级为光滑函数。这个定理暂时悬而未决，目前手头紧的同学可以尝试一下 (bushi)。

4.1.4 快进到微分流形 *

一般的拓扑空间上，可用的工具太少。我们更喜欢研究性质好的空间。

定义 16 (拓扑流形)**.** *满足 T_2, A_2 和局部欧的拓扑空间称为***拓扑流形***。*

T_2 又称为 **Hausdorff 性质**，指的是任何两点都可以用两个开集把它们分开，不会粘连到一起。A_2 称为**第二可数**，比较复杂，暂时理解为“不是太大”就好。局部欧的性质很重要，它表示任何一个点，都可以找到一个开邻域与欧氏空间的一个开集同胚。这使得我们可以把流形局部放在欧氏空间里研究。

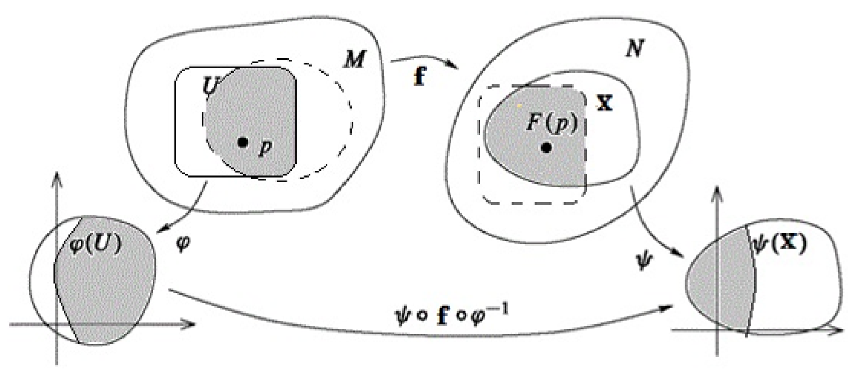

图 8: 流形上的光滑函数

进一步，如果拓扑流形性质足够好，我们可以在上面加一个**光滑结构**，得到**光滑流形**。由此我们可以定义光滑函数（不仅仅连续），具体步骤是如上图。这样，就可以用欧氏空间中函数的光滑性定义流形上函数的光滑性。

流形理论中最重要的结论称为**单位分解**：

定理 9 (光滑流形的单位分解)**.** 令 M 为一个光滑流形，$\{U\}$ 一列覆盖 M 的开集（可以不可数）。若 $\{\rho_\alpha\}$ 是一族定义在整个流形 M 上光滑函数，且满足

- 对于任意 α，$0 \leq \rho\alpha \leq 1$；
- 对于任意 α，$\rho_\alpha|_{U_\alpha^c} = 0$；
- 任意一点 $p \in M$，都存在一个的邻域，在上面只有**有限个** ρ_α 非零；
- 对于任意 $p \in M$，$\sum \rho_\alpha(p) = 1$。

则称 $\{\rho_\alpha\}$ 为一个从属于 $\{U\}$ 的 *(光滑) 单位分解 (P.O.U.)*

一个极其不平凡的结论是**单位分解一定存在**。而光滑流形理论中的绝大多数结论最终归结于单位分解的存在性。

单位分解存在性证明，采用的是构造性方法，用到了 (B1) 中那个著名的函数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

正是它光滑但不解析的特性，让光滑流形的理论远远比解析流形丰富。

$$f_1(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \implies f_1(x) = \begin{cases} \in (0,1), & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

$$f_2(x) = \frac{f_1(x)}{f_1(x) + f_1(1-x)} \implies f_2(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \in (0,1), & 0 < x < 1, \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$f_3(x) = f_2(2 - |x|) \implies f_3(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq 2, \\ \in (0,1), & 1 < |x| < 2, \\ 1, & |x| \leq 1. \end{cases}$$

The graphs of f_1, f_2 and f_3 (with $n = 1$) are shown below:

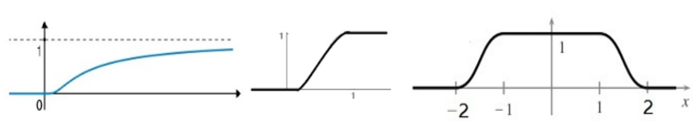

图 9: 单位分解的初步构造

4.2 古典微分几何

拓扑学研究的对象比较抽象，那下面来点具体的、我们能看见的。将分析工具引入三维欧式空间，就能建立与经典力学同步发展的古典微分几何（而现代的微分几何是在流形上研究的）。

4.2.1 Frenet 标架 *

曲线是一个一维空间，所以我们希望只用一个参数表示。曲线方程通常写作 $\mathbf{r}(t)$，t 可以直观理解为时间，此时曲线对应了一个物体再某个时刻的位置。

但是，后面的计算会发现，用时间做参数不够好。一个观察是，把曲线拉直，那么它可以和一条直线一一对应，因此可以采用**弧长**作为参数。换句话说，将“走了多远”和“走到了哪里”对应起来，记作 $\mathbf{r}(s)$。

为了区分，对一般参数求导记为 $\mathbf{r}'$，对弧长参数求导记为 $\dot{\mathbf{r}}$。弧长参数的最大好处是**导数模长恒为 1**。

对于曲线，最重要的是研究它的“弯曲程度”，即**曲率**，用 κ 表示。对于空间曲线，我们还可以研究**挠率**，即这条曲线有多不想待在一个平面内，用 τ 表示。最形象的例子是**圆柱螺旋线**，它像一个弹簧，曲率越大，半径越小（转圈圈转得快）；挠率越大，间距越大（被拉长的弹簧）。

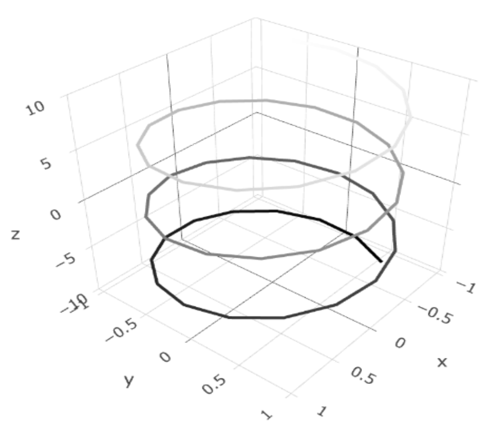

图 10: 圆柱螺旋线

曲线论可以用一个公式终结，即

定理 10 (曲线论). 弧长参数空间曲线满足

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}\mathbf{t}\\ \mathbf{n}\\ \mathbf{b}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \kappa & 0\\ -\kappa & 0 & \tau\\ 0 & -\tau & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{t}\\ \mathbf{n}\\ \mathbf{b}\end{pmatrix}$$

这里 $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ 依次是切向量、主法向量、副法向量。

它在物理中有另一个名字：**自然坐标系**。

4.2.2 曲面基本量与曲率 *

曲面是二维的，所以参数化之后，可以写成 $\mathbf{r}(u,v)$。研究曲面实际上不需要太多关注它的，我们通常只需知道它的**基本量**。

定义 17 (曲面的基本量). 设曲面 $\mathbf{r}(u,v)$ 的法向量为 $\mathbf{n}$，则它的第一基本量为

$$E =< \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u > \qquad F =< \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v > \qquad G =< \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v >$$

第二基本量为

$$L =< \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n} > \qquad L =< \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n} > \qquad L =< \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n} >$$

比如，之后学到曲面积分时，我们用到的面积元就可表示为 $\sqrt{EG-F^2}$。

类似曲线，我们也想研究一个曲面的弯曲程度。Gauss 采用的方法是这样的：

1. 选取曲面上一点的一个小邻域，每点对应一个单位法向量；
2. 将这些单位向量的起点平移到单位球球心，它们在球面上指出一个面积；
3. 计算它与小邻域面积的比值，并让小邻域面积趋于 0，得到 **Gauss 曲率**，记为 K。

我们就可以通过基本量计算曲面的弯曲程度。

定理 11 (Gauss 曲率的计算).

$$K = \frac{LN-M^2}{EG-F^{@}}$$

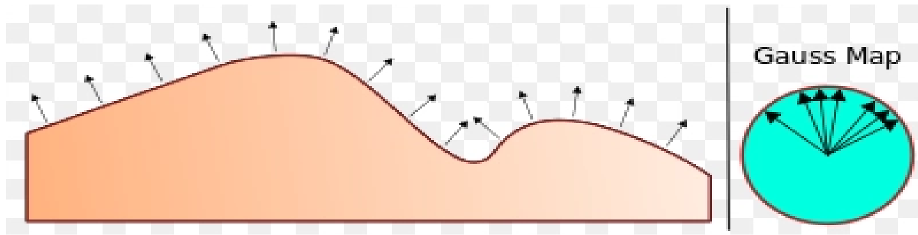

图 11: Gauss 曲率

4.2.3 内蕴几何的一些结论

曲面的法向量与这个曲面如何嵌入高维空间有关。比如平面和抛物柱面，它们在内蕴上没有任何区别，可以**等距同构**，只是嵌入三维空间的方式不一样。由此可以看出，第二基本量是个依赖于嵌入，但第一基本量至于曲面本身的性质有关。根据这一性质，我们完全可以发展一套**内蕴几何**的理论。限于篇幅，这里只介绍几个有意思的定理。

定理 12 (Gauss 绝妙定理)**.**

$$\begin{aligned}4(EG-F^2)K = {} & E(E_vG_v-2F_vG_v+G_u^2)\\ & +F(E_uG_v-E_vG_u-2E_vG_v+4F_uF_v-2F_uG_u)\\ & +G(E_uG_v-2E_uF_v+E_v^2)\\ & -2(EG-F^2)(E_{vv}-2F_{uv}+G_{uu})\end{aligned}$$

这个定理虽然丑陋，但它表明了 Gauss 曲率是个内蕴量，它与曲面如何嵌入空间无关。因此，我们可以得到一个反直觉的事实：包括圆柱面和抛物柱面在内，**柱面的曲率为 0**。这个定理也说明了为什么白纸为什么没法贴在球面上。

广义相对论中提到“我们的宇宙是弯曲的”也是这个意思，只不过是更高维的 Gauss 曲率非平凡。那么问题来了，我么生活在宇宙中，目前无法站到更高维取看，那怎么判断宇宙是弯曲的呢？

定理 13 (Gauss-Bonnet 公式)**.** *设曲面上三条***测地线** *围成 $\triangle ABC$，则*

$$\iint_{\triangle ABC} K\,dS = \angle A+\angle B+\angle C-2\pi$$

测地线大致可以理解为曲面上最短的直线，比如平面上的直线、球面上的大圆（如经线）。在弯曲的空间中，我们确实可以让“三角形内角和不是 180 度”。通过这个定理，我们即使“身在庐山中”，也可以窥其形貌。

最后，再介绍一个很形象的定理：

定理 14 (毛球定理). *球面上不存在处处光滑的向量场。*

它的另一种表述是“球面连续向量场必有零点”。

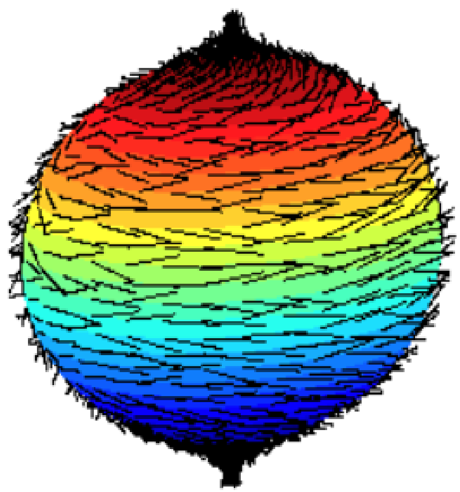

图 12: 毛球定理

向量场就是向量值函数，它的光滑性也是指无穷次可导。把风向和风力视为向量，那么一个形象的表述是**地球上至少有一处不刮风**。

另一方面，前面提到的**光滑 Poincare 猜想**在 2 维是成立的（曲面分类就能证）。因此，我们考虑一只猫，它的外部与一个球面微分同胚。由于光滑函数的复合仍为光滑函数，球面上不存在处处光滑向量场表明了猫身上不存在光滑向量场（猫毛）。因此，猫的身上总有一处，无论往哪个方向摸都是逆毛而上，这就是这只猫身上的“禁区”，不要摸这些地方。