第4讲：二次曲面与旋转曲面(rotation surface)

(一) 二次曲面(quadric)：

(1) 球面Σ：设球心在$M_0(a,b,c)$，半径为$R>0$的球面Σ上任一点的坐标为$Q(x,y,z)$，则$|\overrightarrow{M_0Q}|^2=R^2 \Leftrightarrow$

$$|(x-x_0,y-y_0,z-z_0)|^2=R^2 \Leftrightarrow (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2 \quad (※1)$$

(※1)称为球面Σ的标准方程，$R=0$时，球面退缩为一点。

(※1)可化为一般式球面方程：

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0 \quad (※2)$$

(※2)为球面，当且仅当：$\frac{1}{4}(A^2+B^2+C^2)-D=R^2\geq 0$，

(※2)配方：$(x+\frac{A}{2})^2+(y+\frac{B}{2})^2+(z+\frac{C}{2})^2=\frac{1}{4}(A^2+B^2+C^2)-D \triangleq R^2 \geq 0$)

(2) 曲面的一般方程：$F(x,y,z)=0$ —— 隐式曲面，

若$F(x,y,z)=0$可化为$z=f(x,y)$，则称$z=f(x,y)$为显式曲面。

例1. $x^2+y^2+z^2-1=0$为隐式球面；$z=\sqrt{1-(x^2+y^2)}$，$x^2+y^2\leq 1$

为显式上半球面。

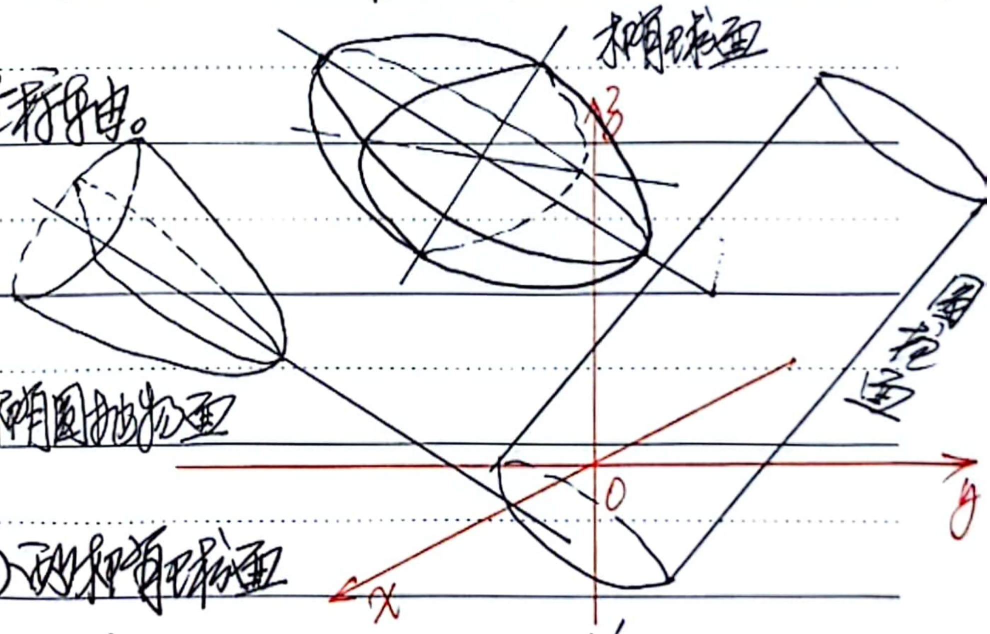
当 $F(x,y,z)=Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Jz+K$

且 $(A,B,C,D,E,F)\neq 0=(0,0,0,0,0,0)$ 时，$F(x,y,z)=0$ 为

二次曲面。当 $D=E=F=0$ 且 $A^2+B^2+C^2>0$ 时，二次曲面的对

称轴都平行于坐标轴，当 $D^2+E^2+F^2>0$ 时，二次曲面的对称

轴不都平行于坐标轴。

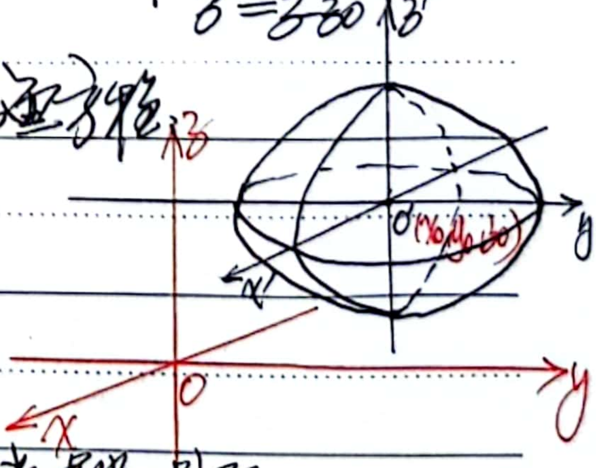


(3) 中心在 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的椭球面

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$ 经坐标平移 $\begin{cases} x'=x-x_0 \\ y'=y-y_0 \\ z'=z-z_0 \end{cases}$ 可化为

$O-x'y'z'$ 坐标系中的标准椭球面方程，

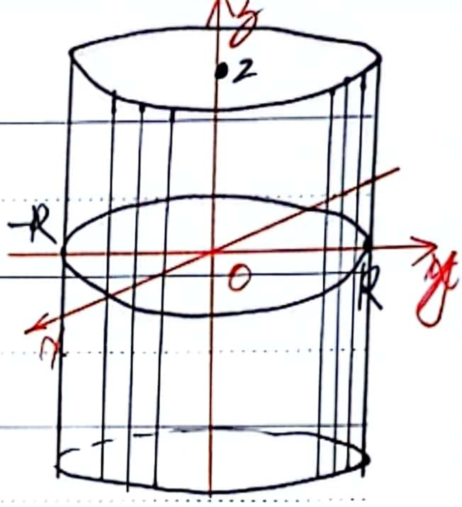
$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1 \quad (*3)$$



$$z=z_0\pm c\sqrt{1-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}}$$

取"+"时为上半椭球面，取"-"时为下半椭球面 (2).

(4). 圆柱面：$x^2+y^2=R^2$ $(R>0)$. (如右)



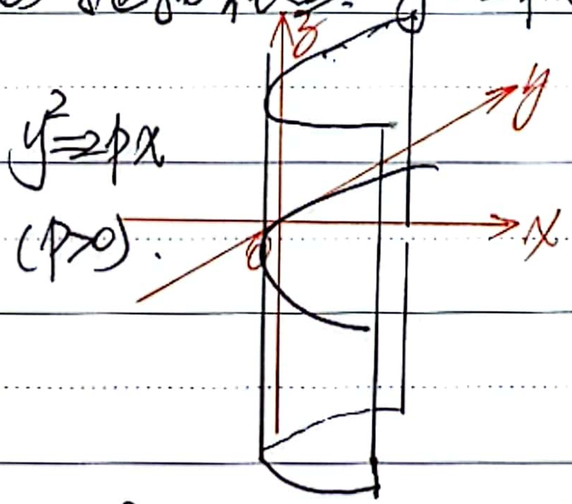
圆柱面是由直线连续移动构成的，这类曲面称之为直纹面。(ruled surface)

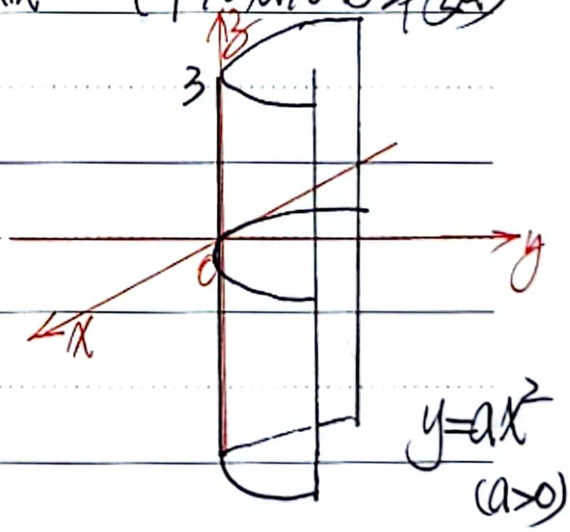
若要表示xoy平面中的圆 $x^2+y^2=R^2$，

则应写成 $\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ z=0 \end{cases}$ 即圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 与平面 $z=0$

的交线，同理：$\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ z=2 \end{cases}$ 是空间中 $z=2$ 的圆周。

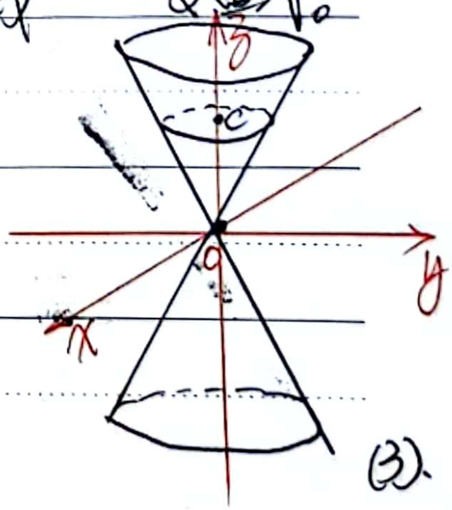
(5). 抛物柱面：$y^2=2px$ 及 $y=ax^2$ $(p\neq 0, a\neq 0$ 为常数)





而 $\begin{cases} y^2=2px \\ z=0 \end{cases}$，$\begin{cases} y=ax^2 \\ z=3 \end{cases}$ 是空间中的抛物线——交曲线。

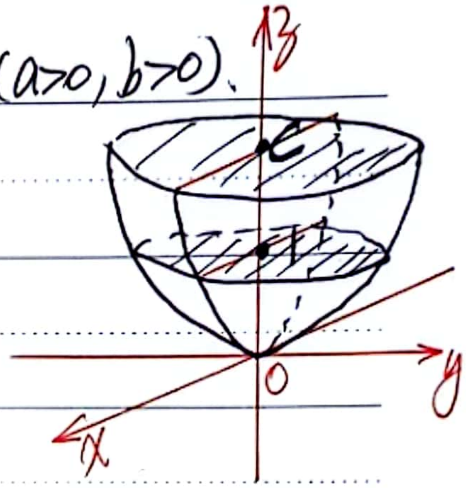
(6) 圆锥面. $z^2=a^2(x^2+y^2)$ $(a>0)$



而 $\begin{cases} z^2=a^2(x^2+y^2) \\ z=c \end{cases}$ 为空间的圆周；

$\begin{cases} z=\pm ay \\ x=0 \end{cases}$ 是空间的相交直线。

(7) 椭圆抛物面: $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ $(a>0, b>0)$.

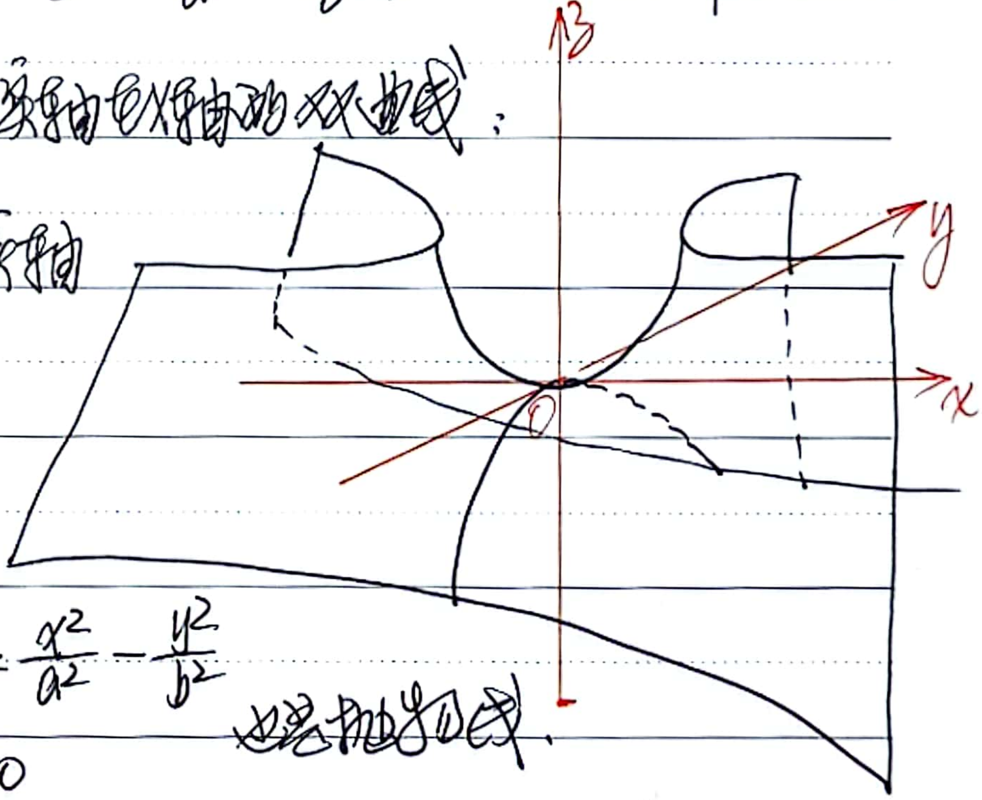


$\begin{cases} z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \\ z=z_0>0 \end{cases}$ 都是空间中的椭圆:

$$\frac{x^2}{(a\sqrt{z_0})^2}+\frac{y^2}{(b\sqrt{z_0})^2}=1$$

其所围面积为 $\pi(a\sqrt{z_0})(b\sqrt{z_0})=\pi ab z_0$.

(8). 双曲抛物面: $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ $(a>0, b>0)$ (即马鞍面).



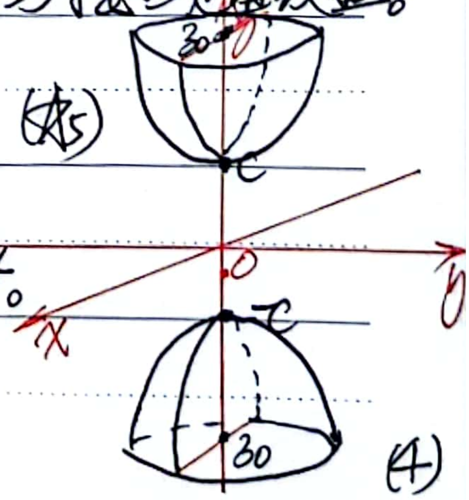
$z=z_0>0$ 时是一族实轴在 x 轴的双曲线;

$z=z_0<0$ 时,是一族实轴在 y 轴的双曲线.

$\begin{cases} z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} \\ x=0 \end{cases}$ 是抛物线, $\begin{cases} z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} \\ y=0 \end{cases}$ 也是抛物线.

故将双曲抛物面称马鞍面。易知,马鞍面是直纹面。

(9). 双叶双曲面: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ (图5)

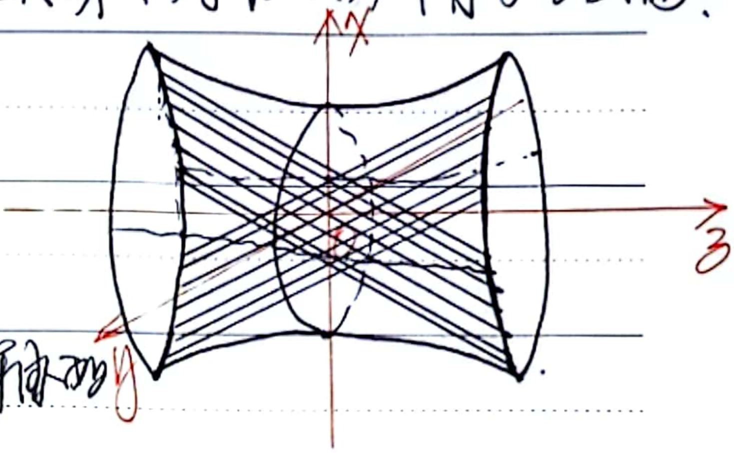


从 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}-1\geq 0 \Rightarrow |z|\geq c$ 椭圆族。

且 $z=z_0>c$ 或 $z=z_0<-c$ 时,都是椭圆。

(10) 单叶双曲面: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (a,b)

从 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}+1\geq 0$, $\forall z\in R$ 知, 对 $\forall z\in R$, 都有曲面图像.

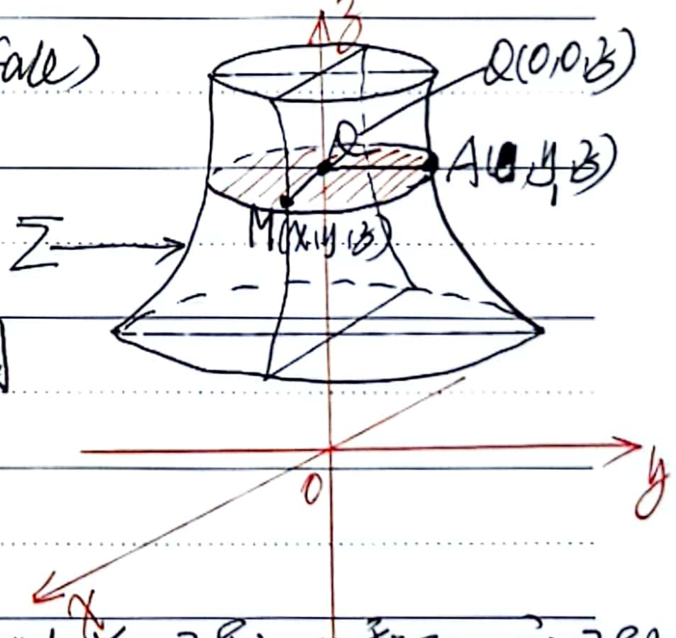


任取 $z_0\in R$, $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}+1\\ z=z_0\end{cases}$

都是椭圆, 即用垂直于oz轴的平面去切单叶双曲面, 截线都是椭圆.

另证, 单叶双曲面是由直线连续移动构成的直纹面。

(三) 旋转曲面 (rotation surface)



设 $L: z=f(y)$ 是一条平面连续曲线, 将L绕oz轴旋转一周

所得的旋转曲面记作Σ,

设 $M(x,y,z)$ 是Σ上任一点, 过点M作oz轴的垂面交oz轴于 $Q(0,0,z)$, 交曲线L于 $A(0,y_1,z)$ 则 $|QM|^2=|QA|^2\Rightarrow$

$x^2+y^2+0^2=0^2+y_1^2+0^2$ 即 $y_1^2=x^2+y^2\Rightarrow y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2}$.

故 $z=f(|y|)=f(\pm\sqrt{x^2+y^2})$ 为三元函数，即曲线 $z=f(y)$ 绕 z 轴旋转一周的旋转曲面中，z 保持不变，而 y 变量用 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 代替。同理，曲线 $z=f(y)$ 绕 y 轴旋转一周的曲面，为 $f(y)=\pm\sqrt{x^2+z^2}$。

(三) 例题：

例1. 证明 (1) 马鞍面 $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ 是直纹面；

(2) 单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 是直纹面。

证(1)：马鞍面可化为 $(\frac{x}{a}-\frac{y}{b})(\frac{x}{a}+\frac{y}{b})=z \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\lambda\neq 0\\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{z}{\lambda}\end{cases}$

当 $\lambda\neq 0$ 连续变化时，交面式的直线 L：$\begin{cases}\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\lambda\\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{z}{\lambda}\end{cases}$ 就在空间中不断移动，最后得到了马鞍面，因此，马鞍面是直纹面。

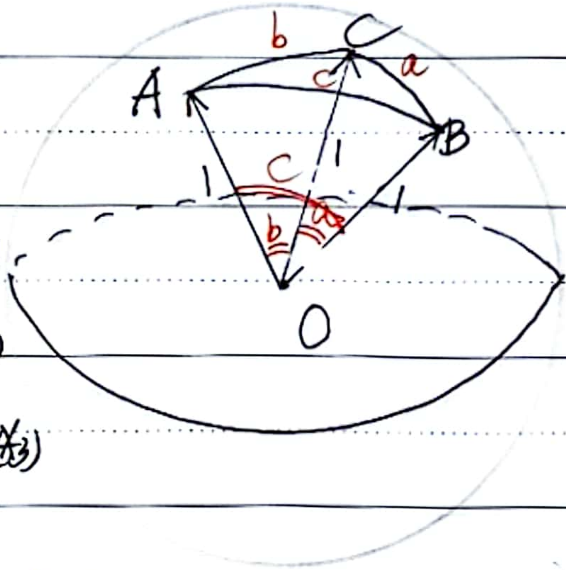
证(2)：从 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \Leftrightarrow (\frac{y}{b}-\frac{z}{c})(\frac{y}{b}+\frac{z}{c})=(1-\frac{x}{a})(1+\frac{x}{a})$

$\Rightarrow \begin{cases}\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=\lambda(1-\frac{x}{a}) & (\lambda\neq 0\text{ 常数})\\ \frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\frac{1}{\lambda}(1+\frac{x}{a})\end{cases}$ —— 交面式直线

即单叶双曲面是由一族直线连续运动构成的，故为直纹面。

例2、球面三角形的余弦定理（P125/6）：

设单位球面三角形 ABC 是过球心 $O(0,0,0)$ 的三个平面 π_1,π_2,π_3 与单位球面 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=1$ 相交而成的球面三角形 ΔABC，如图所示：



则有：

$$\begin{cases} \cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos\angle A, & (※1) \\ \cos b=\cos a\cos c+\sin a\sin c\cos\angle B, & (※2) \\ \cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos\angle C. & (※3) \end{cases}$$

统称为球面三角形 ΔABC 的余弦定理.

下面只证(※1)，(※2)(※3)可同样证。

设 $\vec{OB},\vec{OC}$ 所确定平面为 π_1，法向量 $\vec{n_1}=\vec{OB}\times\vec{OC}$；$\vec{OC},\vec{OA}$ 所确定的平面为 π_2，$\vec{n_2}=\vec{OA}\times\vec{OC}$，$\vec{OA},\vec{OB}$ 所确定的平面为 π_3，$\vec{n_3}=\vec{OA}\times\vec{OB}$.

则 $\cos\angle A=\cos(\widehat{\vec{n_2},\vec{n_3}})=\dfrac{\vec{n_2}\cdot\vec{n_3}}{|\vec{n_2}||\vec{n_3}|}=\dfrac{(\vec{OA}\times\vec{OC})\cdot(\vec{OA}\times\vec{OB})}{|\vec{OA}\times\vec{OC}|\,|\vec{OA}\times\vec{OB}|}$，(※4)

依向量乘法的Lagrange恒等式：

$(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=(\vec{\alpha}\cdot\vec{a})(\vec{\beta}\cdot\vec{b})-(\vec{\alpha}\cdot\vec{b})(\vec{\beta}\cdot\vec{a})$ (※5)

又 $|\vec{OA}\times\vec{OC}|=|\vec{OA}||\vec{OC}|\sin(\vec{OA},\vec{OC})=1\cdot1\cdot\sin b$, $|\vec{OA}\times\vec{OB}|=|\vec{OA}||\vec{OB}|\sin(\vec{OA},\vec{OB})$

$=1\cdot1\cdot\sin c$, $(\vec{OA}\times\vec{OC})\cdot(\vec{OA}\times\vec{OB})=(\vec{OA}\cdot\vec{OA})(\vec{OC}\cdot\vec{OB})-(\vec{OA}\cdot\vec{OB})(\vec{OC}\cdot\vec{OA})$

$=(|\vec{OA}||\vec{OA}|\cos 0)(|\vec{OC}||\vec{OB}|\cos a)-(|\vec{OA}||\vec{OB}|\cos c)(|\vec{OC}||\vec{OA}|\cos b)$

$=1\cdot\cos a-\cos c\cos b$

代入(式7):

$$\cos\angle A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}\iff\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos\angle A$$

至于Lagrange恒等式，只要设 $\begin{cases}\vec{\alpha}=(a_1,b_1,c_1)\\ \vec{\beta}=(a_2,b_2,c_2)\\ \vec{a}=(x_1,y_1,z_1)\\ \vec{b}=(x_2,y_2,z_2)\end{cases}$ 则可易验证

(式8)的左边与右边是同一个数。

例3. 求曲线L: $\begin{cases}\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1\\ x=0\end{cases}$ 分别绕y轴、z轴旋转一周所得旋转曲面.

解(1) 绕y轴旋转，y保持不动，将L中的z改成 $\pm\sqrt{x^2+z^2}$

则旋转曲面 Σ_1 为: $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{(\pm\sqrt{x^2+z^2})^2}{b^2}=1\iff\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$

解(2) 绕z轴旋转，z保持不动，将L中的y改成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$.

则旋转曲面 Σ_2 为: $\dfrac{(\pm\sqrt{x^2+y^2})^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1\iff\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$.

Σ_1, Σ_2 都是旋转椭球面。

例4、求直线 L: $\begin{cases} y=kx & (k\neq 0, 常数) \\ z=0 \end{cases}$ 分别绕x轴、y轴旋转一周所得旋转曲面 Σ_1, Σ_2.

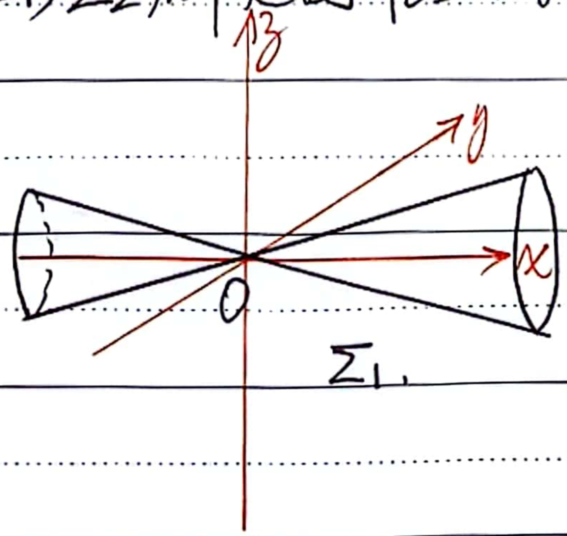
解(1): 绕x轴旋转时, x保持不变, y改写成 $\pm\sqrt{y^2+z^2}$,

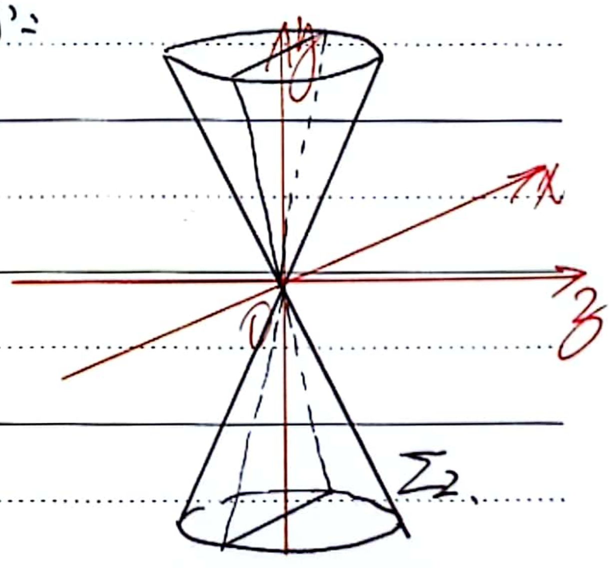
则 Σ_1: $\pm\sqrt{y^2+z^2}=kx$ 即 Σ_1: $y^2+z^2=k^2x^2$, $(k\neq 0)$

解(2): 绕y轴旋转时, y保持不变, x改为 $\pm\sqrt{x^2+z^2}$,

则 Σ_2: $y=k(\pm\sqrt{x^2+z^2})$ 即 Σ_2: $y^2=k^2(x^2+z^2)$, $(k\neq 0)$

Σ_1, Σ_2 都是圆锥面, 如图所示:





四、作业: EX8.3/ 1; 2; 3.