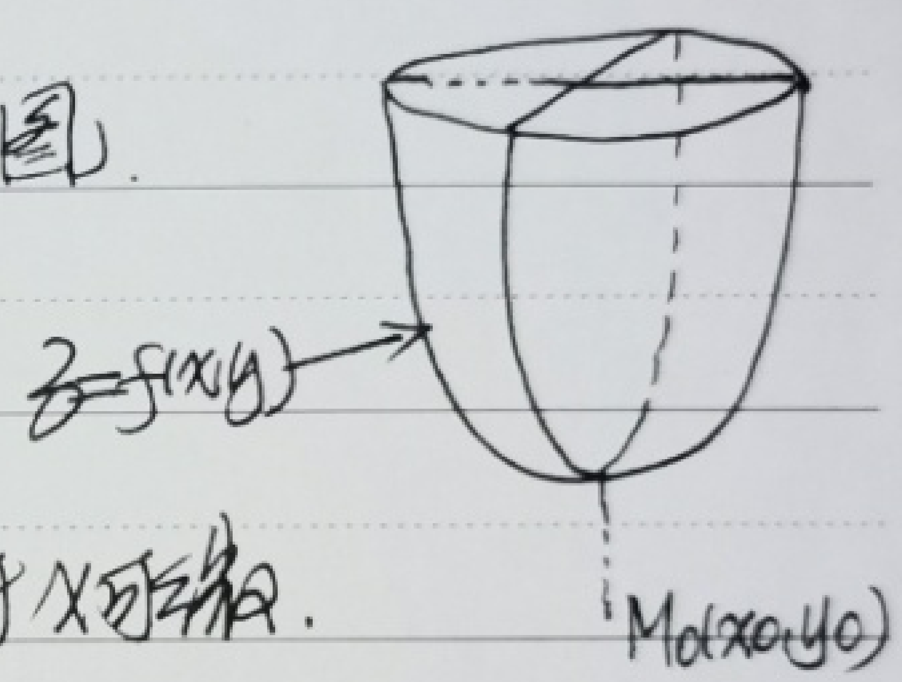
第14讲：多元函数的极值与最值.

(一) 多元函数极值的必要条件与充分条件：

Th1（可微函数有极值的必要条件）设 $z=f(x,y)\in U(M_0,\delta)$ 中可微 且 $f(M_0)$ 为 f 的极值，则必有 $f'_x(M_0)=0, f'_y(M_0)=0$.

证：不妨设 $f(M_0)$ 为 f 的极小值（如图）.



则 $f(x,y_0)$ 作为 x 的一元函数

在 x_0 处也取得极小值 且 $f(x,y_0)$ 关于 x 可微.

由 Fermat th, $\left.\frac{df(x,y_0)}{dx}\right|_{x_0}=0 \Longleftrightarrow f'_x(x_0,y_0)=0$. 同理, $f'_y(x_0,y_0)=0$.

即可微函数的极值点必是驻点（可推广到 n 元函数）.

Th2（二阶连续可微函数有极值的充分条件）

设 $z=f(x,y)\in C^2(U(M_0,\delta))$ 且 $M_0(x_0,y_0)$ 是 f 的一个驻点 $\Leftrightarrow \begin{cases} f'_x(M_0)=0, \\ f'_y(M_0)=0, \end{cases}$

$A=f''_{xx}(M_0), B=f''_{xy}(M_0), C=f''_{yy}(M_0), Hf(M_0)=\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$，则

① $Hf(M_0)>0$（正定）时，即 $\begin{cases} A>0 \\ \Delta=AC-B^2>0 \end{cases}$ 时，$f(M_0)$ 为极小值；

② $Hf(M_0)<0$（负定），即 $\begin{cases}A<0\\ \Delta=AC-B^2<0\end{cases}$ 时，$f(M_0)$ 为 f 的极大值；

③ $\Delta=AC-B^2<0$ 时，$f(M_0)$ 不是 f 的极值.

证：对 $\forall(x,y)\in \mathring{U}(M_0,\delta)$，由 f 的二阶 Taylor 公式，$\left(\begin{matrix}h=x-x_0=\Delta x\\ k=y-y_0=\Delta y\end{matrix}\right)$

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}[h^2A+2hkB+k^2C]+o(\rho^2),\ \rho=\sqrt{h^2+k^2}.$$

$$=\frac{1}{2}\rho^2\left[A\left(\frac{h}{\rho}\right)^2+2B\frac{h}{\rho}\cdot\frac{k}{\rho}+C\left(\frac{k}{\rho}\right)^2+\frac{o(\rho^2)}{\rho^2}\times 2\right],\ 令\begin{cases}\frac{h}{\rho}=\cos\theta\\ \frac{k}{\rho}=\sin\theta\end{cases}$$

$$=\frac{1}{2}\rho^2\left[(A\cos^2\theta+2B\cos\theta\sin\theta+C\sin^2\theta)+\frac{o(\rho^2)}{\rho^2}\cdot 2\right]$$

令 $g(\theta)=A\cos^2\theta+2B\cos\theta\sin\theta+C\sin^2\theta$ 则

$$g(\theta)=A\left(\cos\theta+\frac{B}{A}\sin\theta\right)^2+\frac{AC-B^2}{A}\sin^2\theta,\quad \theta\in[0,2\pi].$$

(1°) 当 $A>0$，$AC-B^2>0$ 即 $Hf(M_0)>0$ 时，$g(\theta)>0$ 恒成立，$\Rightarrow f(x,y)-f(x_0,y_0)$ >0 恒成立，$\Leftrightarrow f(M_0)=f(x_0,y_0)$ 是 f 的一个极小值；

(2°) 当 $A<0$，$AC-B^2>0$ 时，即 $Hf(M_0)<0$ 时，$g(\theta)<0$ 恒成立，$\Rightarrow f(x,y)-f(M_0)$ ≤ 0 恒成立，$\Leftrightarrow f(M_0)$ 是 $f(x,y)$ 的一个极大值；

3°. 当 $\Delta=AC-B^2<0$ 时，利用 $g(0)=A$，设 $\cos\theta_0+\frac{B}{A}\sin\theta_0=0$，$\theta_0\in(0,2\pi]$

则 $\sin\theta_0\neq 0$，否则有 $\begin{cases}\cos\theta_0=0\\ \sin\theta_0=0\end{cases}$ 矛盾！此时 $g(\theta_0)=\frac{AC-B^2}{A}\sin^2\theta_0$

若$A>0 \Rightarrow g(\theta_0)<0$ 即$g(0)\cdot g(\theta_0)<0$. $A<0$时,同样$g(0)g(\theta_0)<0$.

从而在$U(M_0,\delta)$中,$f(x,y)-f(x_0,y_0)\geq 0\ (\leq 0)$恒成立不再保持!

即$f(M_0)=f(x_0,y_0)$不再是f的极值,由对称性,当$C>0$或$C<0$

值 即当$A+C>0$且$\Delta<0$时,$f(M_0)$非极值,

时,只要$\Delta<0$,同样时$f(M_0)$不是极值;当$A=C=0$时,即$B\neq 0$时,

$g(\theta)=B\sin 2\theta$, $\theta\in[0,2\pi]$, $g(\frac{\pi}{4})=B$, $g(\frac{3\pi}{4})=-B$. $g(\frac{\pi}{4})g(\frac{3\pi}{4})<0$.

仍有$g(\theta)>0\ (<0)$恒成立不再保持!即$f(M_0)$不是f的极值。

例1. 考察下列函数在$O(0,0)$处取极值的情况:

(1) $z=f(x,y)=x^2+y^2$, (2) $z=x^3+y^3$; (3) $z=x^4+y^4$; (4) $z=\sqrt{x^2+y^2}$;

(5) $z=xy$.

解(1). $O(0,0)$是f的驻点且$A=f''_{xx}(0,0)=2=C=f''_{yy}(0,0)$, $B=f''_{xy}(0,0)=0$

$Hf(M_0)=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}>0$(正定)$\Rightarrow f(0,0)=0$是$f$的极小值,也是最小值.

解(2). 令$\begin{cases}f'_x=3x^2=0\\f'_y=3y^2=0\end{cases}\Rightarrow$驻点$M_0(0,0)$且$\begin{cases}A=f''_{xx}(0,0)=0\\B=f''_{xy}(0,0)=0\\C=f''_{yy}(0,0)=0\end{cases}\Rightarrow\Delta=0$

充分条件不能用!无论$\delta>0$多么小,在$U(0,\delta)$中,总有$M_1,M_2\in U(0,\delta)$

使 $f(M_1)>0=f(0,0)>f(M_2)$，M_1 在第一象限；M_2 在第三象限.

从而 $f(0,0)=0$ 不是 f 的极值.

解(3). 驻点为 $O(0,0)$. $A=B=C=0$，同样有 $\Delta=AC-B^2=0$.

但对 $\forall(x,y)\in U(O,\delta)$，$f(x,y)\geq f(0,0)=0$ 恒成立. $f(0,0)=0$ 为 f 的极小值.

f 只有一个极小且无极大. 此极小即是 f 的最小.

解(4). $f(0,0)=0$ 是 f 的极小值，也是 f 的最小值. 但 $O(0,0)$

不是 $f(x,y)$ 的驻点，$\because f'_x(0,0)$，$f'_y(0,0)$ 都不存在。

解(5) 从 $\begin{cases} f'_x=y=0 \\ f'_y=x=0 \end{cases}$ 得驻点 $O(0,0)$. 但无论 $\delta>0$ 多么小.

在 $U(O,\delta)$ 中，总有 $M_1, M_2\in U(O,\delta)$，使 $f(M_1)>0=f(0,0)>f(M_2)$.

$\therefore f(0,0)$ 不是 f 的极值.

由上述例子可知，驻点可以是极值点，也可以不是极值点，

极值点可以是驻点，也可不是驻点。$\Delta=AC-B^2=0$ 时可以有

极值，也可以无极值。

(三) 设 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in C^2(D)$，D是凸区域，$M_0(x_{10},x_{20},\cdots,x_{n0})$

是f的驻点：即 $f'_{x_i}(M_0)=0$，$i=1,2,\cdots n$.

$$a_{ij}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}\Big|_{M_0}=a_{ji},\quad i,j=1,2,\cdots n.$$ 则

① $Hf(M_0)=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}>0$（正定）时 $f(M_0)$ 为f的一个极小值；

② $Hf(M_0)<0$（负定）时，$f(M_0)$ 为f的一个极大值.

③ 若f在凸的开区域D中仅有一个极小(大)值，且无极大(小)值.

则此极小(大)值即为f在D中的最小(大)值.

④ 若D是有界的闭区域. 则 f在D中可同时取到最大值与

最小值. 可先求出f在D内的所有驻点 $M_1,M_2,\cdots M_k$，再求

出f在D的边界 ∂D 上的所有驻点 $Q_1,Q_2,\cdots Q_m$，最后比较

$f(M_1),\cdots f(M_k),f(Q_1),\cdots f(Q_m)$ 的大小. 最大者即是f在D

中的最大值，最小者为f在D中的最小值。

(三)例题：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

例1. 在椭球面Σ上求一点$M_0(x_0,y_0,z_0)$，使过M_0的切平面π与三个坐标面围成的四面体Ω之体积$V(\Omega)$最小。(详细见手稿第7页)

例2. 证明：$z=f(x,y)=(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$ 在$D:\begin{cases}x\geq 0\\ y\geq 0\end{cases}$中的最大值$4e^{-2}$. 即：$\frac{x^2+y^2}{4}\leq e^{x+y-2}$，$x\geq 0, y\geq 0$ (ch9综合第6题)

解例1：设M_0在第一卦限，则π为：$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}=1$.

$V(\Omega)=\frac{1}{6}\frac{a^2b^2c^2}{x_0y_0z_0}=\frac{abc}{6}\frac{1}{\sqrt{(\frac{x_0}{a})^2(\frac{y_0}{b})^2(\frac{z_0}{c})^2}}$，再利用平均值不等式！

解例2：1°在D内部仅有驻点$M_1(1,1)$.(鞍点)；2°在边界$y=0$上

$f(x,0)=x^2e^{-x}$，$x\in[0,+\infty)$有驻点$x_1=0$，$x_2=2$，3°在边界$x=0$上，

$f(0,y)=y^2e^{-y}$，$y\in[0,+\infty)$有驻点$y_1=0$，$y_2=2$. 且$f(0,0)=0$，$f(2,0)=4e^{-2}$

$=f(0,2)$. $f(1,1)=2e^{-2}$，且$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}=0$ (*1) $\Rightarrow f(x,y)$在D中的

最大值为$4e^{-2}$，即$\frac{x^2+y^2}{4}\leq e^{x+y-2}$；$x\geq 0, y\geq 0$.

(*1)见手稿第8页。

(四)作业：ex9.5/7(2),(5)；8；11(2),(4)；17，ch9综/6,14.

例1详解：设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是椭球面 $\Sigma: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 位于第一卦限上的点，则 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1$ 且过点 M_0 的切平面方程：$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}=1$，又在三个坐标轴上的截距分别为 $x_A=\frac{a^2}{x_0}$，$y_B=\frac{b^2}{y_0}$，$z_C=\frac{c^2}{z_0}$，从而 $V(\Omega)=\frac{1}{6}x_Ay_Bz_C=\frac{1}{6}\frac{a^2b^2c^2}{x_0y_0z_0}$

$=\frac{abc}{6}\frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^2}\cdot\frac{y_0^2}{b^2}\cdot\frac{z_0^2}{c^2}}}$，利用平均值不等式：$\frac{x_0^2}{a^2}\cdot\frac{y_0^2}{b^2}\cdot\frac{z_0^2}{c^2}\le$

$\left(\frac{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}}{3}\right)^3=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}\Rightarrow V(\Omega)\geq\frac{abc}{6}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{27}}}=\frac{\sqrt{3}}{2}abc$.

等号成立，当且仅当 $\frac{x_0^2}{a^2}=\frac{y_0^2}{b^2}=\frac{z_0^2}{c^2}=\frac{1}{3}$ 即 $\begin{cases}x_0=\frac{a}{\sqrt{3}}\\ y_0=b/\sqrt{3}\\ z_0=c/\sqrt{3}\end{cases}$ 时.

四面体 Ω 的体积 $V(\Omega)$ 取最小值 $\frac{\sqrt{3}}{2}abc=\frac{1}{6}\frac{a^2b^2c^2}{(\frac{a}{\sqrt{3}})(\frac{b}{\sqrt{3}})(\frac{c}{\sqrt{3}})}=\frac{\sqrt{3}}{2}abc$.

即 $M_0(a/\sqrt{3}, b/\sqrt{3}, c/\sqrt{3})$ 是所求的椭球面 Σ 上的一点，利用椭球面 Σ 关于三个坐标面的对称性可知，$M_1(-a/\sqrt{3}, b/\sqrt{3}, c/\sqrt{3})$；

$M_2(-a/\sqrt{3}, -b/\sqrt{3}, c/\sqrt{3})$，$M_3(-a/\sqrt{3}, b/\sqrt{3}, -c/\sqrt{3})$，$M_4(-a/\sqrt{3}, -b/\sqrt{3}, -c/\sqrt{3})$

$M_5(a/\sqrt{3}, -b/\sqrt{3}, -c/\sqrt{3})$，$M_6(a/\sqrt{3}, b/\sqrt{3}, -c/\sqrt{3})$，$M_7(a/\sqrt{3}, -b/\sqrt{3}, c/\sqrt{3})$

也是符合题意的点，即所求的点有8个，即上述8个。

(*1) 关于二元函数的极限: $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}=0$ (ex9.1/14(1))

证明: 令 $x+y=u$, 则 $x\to+\infty$, $y\to+\infty$ 时, $u\to+\infty$, 且 $x^2+y^2=u^2-2xy$

$\Rightarrow (x^2+y^2)e^{-(x+y)}=(u^2-2xy)e^{-u}=u^2e^{-u}-2xye^{-(x+y)}$

而 $\lim\limits_{u\to+\infty}u^2e^{-u}=\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{u^2}{e^u}=\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{2u}{e^u}=\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{2}{e^u}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$, $\lim\limits_{y\to+\infty}ye^{-y}=0$. 因此,

$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}=\lim\limits_{u\to+\infty}u^2e^{-u}-\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}2xye^{-x}e^{-y}=0-0=0$.

(*2) 关于一元函数 $y=f(x)$, $f\in C^2$ 在驻点 x_0 处取极值与多元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ $(n\geq2)$ 在驻点 $M_0(x_{10},x_{20},\cdots,x_{n0})$ 处取极值的统一问题.

(1°) 当 $f\in C^2$ 且 $f'(x_0)=0$ 时, 由 $f(x)$ 在 x_0 处的二阶 Taylor公式:

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)\Rightarrow$

$f(x)-f(x_0)=\frac{1}{2}f^{(2)}(x_0)(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)$, 当 $f^{(2)}(x_0)>0$ (<0) 时,

$f(x)-f(x_0)\geq0$ (≤0) 恒成立, 从而

当 $f^{(2)}(x_0)>0$ 时，$f(x_0)$ 为极小值；$f^{(2)}(x_0)<0$ 时，$f(x_0)$ 为极大值。

注意到 这时 $f(x)$ 在 x_0 处的 海森矩阵 $Hf(x_0)=(f''_{xx}(x_0))$

$=f''_{xx}(x_0)$，且 $f''_{xx}(x_0)>0$ 时，$Hf(x_0)=(f^{(2)}_{xx}(x_0))>0$（正定），

当 $f^{(2)}_{xx}(x_0)<0$ 时，$Hf(x_0)=(f^{(2)}_{xx}(x_0))<0$（负定）。

结合本讲讲稿第5页的内容可知，无论是一元函数 $f\in C^2$，

还是多元函数 $f\in C^2(D)$，D是凸区域，设 M_0 是 f 的驻点

点，则 $Hf(M_0)>0$（正定）时，$f(M_0)$ 为极小值；$Hf(M_0)<0$

（负定）时，$f(M_0)$ 为极大值。这是二阶连续可微函数 f 在驻点

M_0 处取到极值的充分条件。

另外，本讲的例1，实际上是在条件：$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1$ 已知

的条件下，求目标函数 $V(\Omega)=\frac{1}{6}\frac{a^2b^2c^2}{x_0y_0z_0}$ 的极

(最)大(小)值问题，这是下一讲的条件极值问题，即

在一组条件已知的情况下，求某函数的极(最)值问题。

第14讲(续)

例1. 求方程 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的极值，其中，$a>0$ 为常数。

例2. 求方程 $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$ 所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 的极值。

解例1. ⑲ 设 $F(x,y)=(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)$，则

$F'_x=4x(x^2+y^2)-2a^2x=-2x(a^2-2(x^2+y^2))$,

$F'_y=4y(x^2+y^2)+2a^2y=2y(a^2+2(x^2+y^2))\neq0\Rightarrow y\neq0$.

$$y'(x)=\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}=\frac{x(a^2-2(x^2+y^2))}{y(a^2+2(x^2+y^2))}\qquad (※1)$$

令 $y'(x)=0\Rightarrow a^2-2(x^2+y^2)=0$，注：$x\neq0$，否则，将 $x=0$ 代入原方程 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 得 $y=0$，与 $F'_y\neq0$ 矛盾！从 $a^2-2(x^2+y^2)=0\Rightarrow$

$x^2+y^2=\frac{a^2}{2}$，代入原方程 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)\Rightarrow\begin{cases}x^2-y^2=\frac{a^2}{4}\\ x^2+y^2=\frac{a^2}{2}\end{cases}\Rightarrow$

$x_0^2=\frac{3}{8}a^2$，$y_0^2=\frac{a^2}{8}\Rightarrow x_0=\pm\sqrt{\frac{3}{8}}a$，$y_0=\pm\frac{a}{\sqrt{8}}$，

$x_0=\pm\sqrt{\frac{3}{8}}a$ 是隐函数 $y(x)$ 的驻点，即 $y'(x_0)=0$.

由(※)式知：

$$y''(x_0)=\frac{[a^2-2(x_0^2+y_0^2)+x_0(-4x_0-4y_0y'(x_0))][y_0\cancel{(a^2+2(x_0^2+y_0^2)}]-[y(a^2+2(x^2+y^2))]'_x\overbrace{[x(a^2-2(x^2+y^2))]}^{=0}}{[y_0(a^2+2(x_0^2+y_0^2)]^{\cancel{2}}}$$

$$=\frac{a^2-2(x_0^2+y_0^2)-4x_0^2-4x_0y_0\cdot 0}{y_0(a^2+2(x_0^2+y_0^2))}=\frac{a^2-a^2-\frac{3}{2}a^2}{y_0(a^2+a^2)}=\frac{-3}{4y_0}$$

当 $y_0=-\frac{a}{\sqrt{8}}$ 时，$y''(x_0)=\frac{3\sqrt{2}}{2a}>0$，故在点 $M_1(\pm\sqrt{\frac{3}{8}}a,-\frac{a}{\sqrt{8}})$ 的邻域中，

隐函数 $y(x)$ 有极小值 $-\frac{a}{\sqrt{8}}$；

当 $y_0=a/\sqrt{8}$ 时，$y''(x_0)=\frac{-3\sqrt{2}}{2a}<0$，故在点 $M_2(\pm\sqrt{\frac{3}{8}}a,\frac{a}{\sqrt{8}})$ 的邻域中，隐函数 $y(x)$ 有极大值 $a/\sqrt{8}$。

解例2：方法(一)：微分法：

令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10$，则 $\begin{cases}F'_x=2x-2\\ F'_y=2y+2\\ F'_z=2z-4\neq 0\Rightarrow z\neq 2.\end{cases}$

$$\begin{cases}z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{2x-2}{2z-4}=\frac{1-x}{z-2},\\ z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{2y+2}{2z-4}=-\frac{y+1}{z-2}\end{cases}$$

令 $\begin{cases}z'_x=0\\ z'_y=0\end{cases}$ 得驻点 $\begin{cases}x_0=1\\ y_0=-1.\end{cases}$

将 $x_0=1, y_0=-1$ 代入原方程（这一步求隐函数极值都会遇到）

$$x_0^2+y_0^2+z_0^2-2x_0+2y_0-4z_0-10=0 \Rightarrow z_0^2-4z_0-12=0 \Rightarrow \begin{cases} z_0=-2 \text{ 或} \\ z_0=6. \end{cases}$$

$$A=z''_{xx}(M_0)=\frac{-1\cdot(z_0-2)-z'_x(M_0)(1-x_0)}{(z_0-2)^2} \xrightarrow[z_0=6\text{时}]{x_0=1,y_0=-1} -\frac{1}{4}<0,$$

$$B=z''_{xy}(M_0)=\left(\frac{1-x}{z-2}\right)'_y\Big|_{M_0}=\frac{x-1}{(z-2)^2}\Big|_{M_0}=\frac{x_0-1}{(z_0-2)^2}=\frac{0}{4^2}=0.$$

$$C=z''_{yy}(M_0)=-\frac{1\cdot(z_0-2)-z'_y(M_0)(y_0+1)}{(z_0-2)^2} \xrightarrow[z'_y(M_0)=0,\,z_0=6]{x_0=1,y_0=-1} -\frac{1}{4}$$

$H_z(M_0)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4} & 0\\ 0 & -\frac{1}{4}\end{pmatrix}$，即 $A=-\frac{1}{4}<0$，$\Delta=AC-B^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}>0$

即 $H_z(M_0)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4} & 0\\ 0 & -\frac{1}{4}\end{pmatrix}<0$（负定），故在点 $M_1(1,-1,6)$ 的邻域中，隐函数 $z(x,y)$ 有极大值 6；

当 $z_0=-2$ 时，$A=\frac{1}{4}=C$，$B=0$，$H_z(M_0)=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & 0\\ 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}>0$

故在点 $M_2(1,-1,-2)$ 的邻域中，隐函数 $z(x,y)$ 有极小值 -2。

方法(2)：微分法：对原方程进行微分得：

$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=10+1^2+1^2+2^2=16$. $\Rightarrow$

$(z-2)^2=16-[(x-1)^2+(y+1)^2]$ $\Rightarrow$

$$2-\sqrt{16-(x-1)^2-(y+1)^2}\le z\le 2+\sqrt{16-(x-1)^2-(y+1)^2}$$

当 $\begin{cases} x_0=1 \\ y_0=-1 \end{cases}$ 时，$\begin{cases} z_{max}=2+\sqrt{16-0}=6, \\ z_{min}=2-\sqrt{16-0}=-2. \end{cases}$ 即 $-2\le z\le 6$.

故在点 $M_1(1,-1,6)$ 的邻域中，隐函数 $z(x,y)$ 有极大值 6，同时，$z=6$ 也是隐函数 $z(x,y)$ 的最大值；

在点 $M_2(1,-1,-2)$ 的邻域中，隐函数 $z(x,y)$ 有极小值 -2，同时，$z=-2$ 也是 $z(x,y)$ 的最小值。