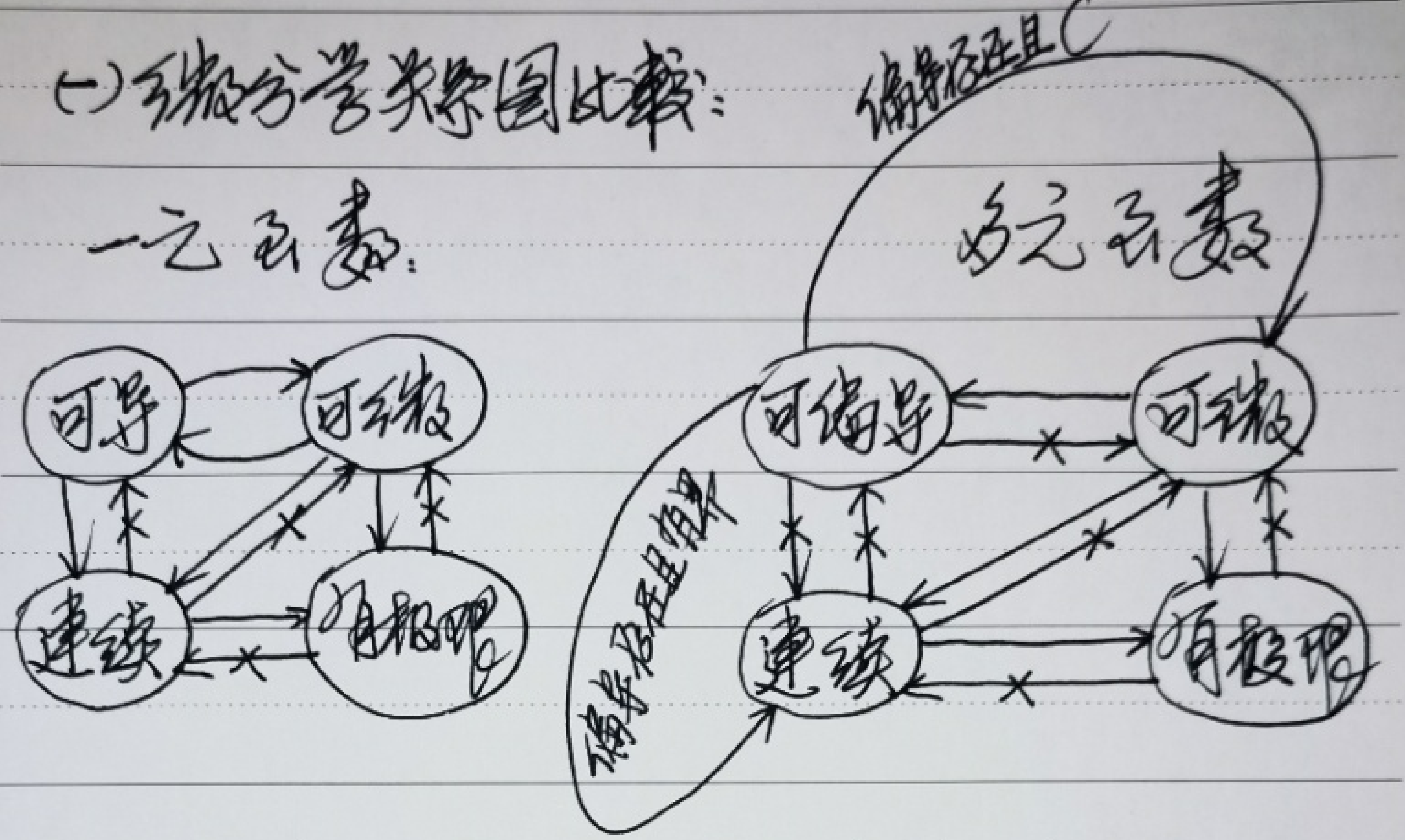
第16讲：多元函数微分学复习与小结

(一) 微分学关系图比较：



多元函数微分学关系图与一元函数微分学关系图相比，有了一些本质的变化，这些变化是由于多元函数的极限动点趋于定点有无穷多种方式，而一元函数的极限只有左、右极限两种方式的不同而产生的。

例1．设 $z=f(x,y)$ 在区域D中偏导数存在且有界，即 $\exists M>0$，使 $|f'_x(x,y)|\le M$，$|f'_y(x,y)|\le M$，$\forall (x,y)\in D$，试证明：$f\in C(D)$．

证：对 $\forall M_0(x_0,y_0)\in D$，设 $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\in D$，则

$$\Delta z = f(M)-f(M_0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0) = [f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)] + [f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)] \qquad (1).$$

$= f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)\Delta x + f'_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y$, $\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$

$\xrightarrow{\Delta x\to 0,\ \Delta y\to 0} 0+0=0$ （有界变量与无穷小量之积仍是无穷小）

即 $f(x,y)$ 在 $M_0(x_0,y_0)$ 处连续．由 $M_0(x_0,y_0)\in D$ 中的任意性可知．

$f(x,y)$ 在区域 D 中连续。

（三）证明：一切二次曲面 Σ：$ax^2+by^2+cz^2+dx+ey+fz+g=0$

在其上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面为：

$\pi_{切}$：$axx_0+byy_0+czz_0+d\cdot\frac{x+x_0}{2}+e\cdot\frac{y+y_0}{2}+f\cdot\frac{z+z_0}{2}+g=0$．

其中，a,b,c,d,e,f,g 为常数 且 $a^2+b^2+c^2>0$．

证：令 $F(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2+dx+ey+fz+g$，则 $\pi_{切}$ 的法向

量 $\vec{n}=\nabla F|_{M_0}=(F'_x,F'_y,F'_z)|_{M_0}=(2ax+d,2by+e,2cz+f)|_{M_0}=$

$(2ax_0+d,2by_0+e,2cz_0+f)$ 依 $\pi_{切}$ 的点法式：得 $\pi_{切}$ 为：

$(2ax_0+d)(x-x_0)+(2by_0+e)(y-y_0)+(2cz_0+f)(z-z_0)=0 \Leftrightarrow$

$2ax_0x+2by_0y+2cz_0z+dx+ey+fz-(dx_0+ey_0+fz_0)=(2ax_0^2+2by_0^2+2cz_0^2$
$+2dx_0+2ey_0+2fz_0+2g)-2(dx_0+ey_0+fz_0+g)=0-2(dx_0+ey_0+fz_0+g)$

$\Leftrightarrow axx_0+byy_0+czz_0+d\frac{x+x_0}{2}+e\frac{y+y_0}{2}+f\frac{z+z_0}{2}+g=0$．

(2).

(三) 设有函数 $z=1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$，曲线 $L:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，

$M_0\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 是 L 上的一点，求 $\frac{\partial z}{\partial \vec{n}}\Big|_{M_0}$，其中 $\vec{n}$ 是 L 上点 M_0 处

的内法向，并求 $\left(\frac{\partial z}{\partial l}\Big|_{M_0}\right)_{max}$，$\left(\frac{\partial z}{\partial l}\Big|_{M_0}\right)_{min}$，$\vec{l}$ 是从 M_0 出发的任一方向。

解：(1) 设 $F(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$，则 L 在 M_0 处的外法向为：

$$\vec{N}=\nabla F\Big|_{M_0}=(F'_x,F'_y)\Big|_{M_0}=\left(\frac{2x}{a^2},\frac{2y}{b^2}\right)\Big|_{\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)}=\left(\frac{\sqrt{2}}{a},\frac{\sqrt{2}}{b}\right)=\frac{\sqrt{2}}{ab}(b,a)$$

取 $\vec{N}=(b,a)$，则 L 在 M_0 处的内法向为 $\vec{n}=-\vec{N}=(-b,-a)\Rightarrow$

$$\vec{n}^0=\left(\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\text{ 且 }\nabla z\Big|_{M_0}=(z'_x,z'_y)\Big|_{M_0}=\left(\frac{-2x}{a^2},\frac{-2y}{b^2}\right)\Big|_{M_0}=\left(\frac{-\sqrt{2}}{a},\frac{-\sqrt{2}}{b}\right)$$

因此，$\frac{\partial z}{\partial \vec{n}}\Big|_{M_0}=\nabla z\Big|_{M_0}\cdot\vec{n}^0=\left(\frac{-\sqrt{2}}{a},\frac{-\sqrt{2}}{b}\right)\left(\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)$；

且 $\left(\frac{\partial z}{\partial l}\Big|_{M_0}\right)_{max}=\left|\nabla z\Big|_{M_0}\right|=\left|\left(\frac{-\sqrt{2}}{a},\frac{-\sqrt{2}}{b}\right)\right|=\sqrt{\left(\frac{-\sqrt{2}}{a}\right)^2+\left(\frac{-\sqrt{2}}{b}\right)^2}=\sqrt{2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}$

$\left(\frac{\partial z}{\partial l}\Big|_{M_0}\right)_{min}=-\left|\nabla z\Big|_{M_0}\right|=-\sqrt{2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}$.

(四) 设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是椭球面 $\Sigma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 位于第一卦

限上的一点，求过 M_0 的切平面又切与三个坐标面围成

的四面体 Ω 的体积 $V(\Omega)$ 最小值。

解(1°). 从(三)知，Σ在M_0的切平面Π的方程为：

$$\frac{x x_0}{a^2}+\frac{y y_0}{b^2}+\frac{z z_0}{c^2}=1. \Rightarrow \Pi 切三个坐标轴上的截距为：$$

$\frac{a^2}{x_0}, \frac{b^2}{y_0}, \frac{c^2}{z_0}$，且$(x_0>0, y_0>0, z_0>0) \Rightarrow V(\Omega)=\frac{1}{6}\frac{a^2b^2c^2}{x_0y_0z_0}$

(2°) 由 $x_0y_0z_0=\sqrt{\frac{x_0^2}{a^2}\frac{y_0^2}{b^2}\frac{z_0^2}{c^2}}\,abc$ 且 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1$ 知

$$\frac{x_0^2}{a^2}\cdot\frac{y_0^2}{b^2}\frac{z_0^2}{c^2}\le\left(\frac{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}}{3}\right)^3=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}\Rightarrow$$

$x_0y_0z_0\le\sqrt{\frac{1}{27}}\,abc=\frac{abc}{3\sqrt{3}}$，从而

$V(\Omega)\ge\frac{a^2b^2c^2}{6}\frac{1}{\frac{abc}{3\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}}{2}abc$. 且等号当且仅当 $\frac{x_0^2}{a^2}=\frac{y_0^2}{b^2}=\frac{z_0^2}{c^2}=\frac{1}{3}$

时成立. 即 $x_0=\frac{a}{\sqrt{3}}, y_0=\frac{b}{\sqrt{3}}, z_0=\frac{c}{\sqrt{3}}$ 时成立. 故Σ上点$M_0\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}\right)$

处的切平面与三个坐标面构成的四面体体积$V(\Omega)$最小.

最小值为$\frac{\sqrt{3}}{2}abc$. (注：Σ上与M_0对称的点还有七个，过七个点的

切平面与坐标面形成的四面体体积同样同时最小。)

解法(二). 用Lagrange乘数法. 求目标函数 $\frac{1}{x_0y_0z_0}$ 或 $x_0y_0z_0$

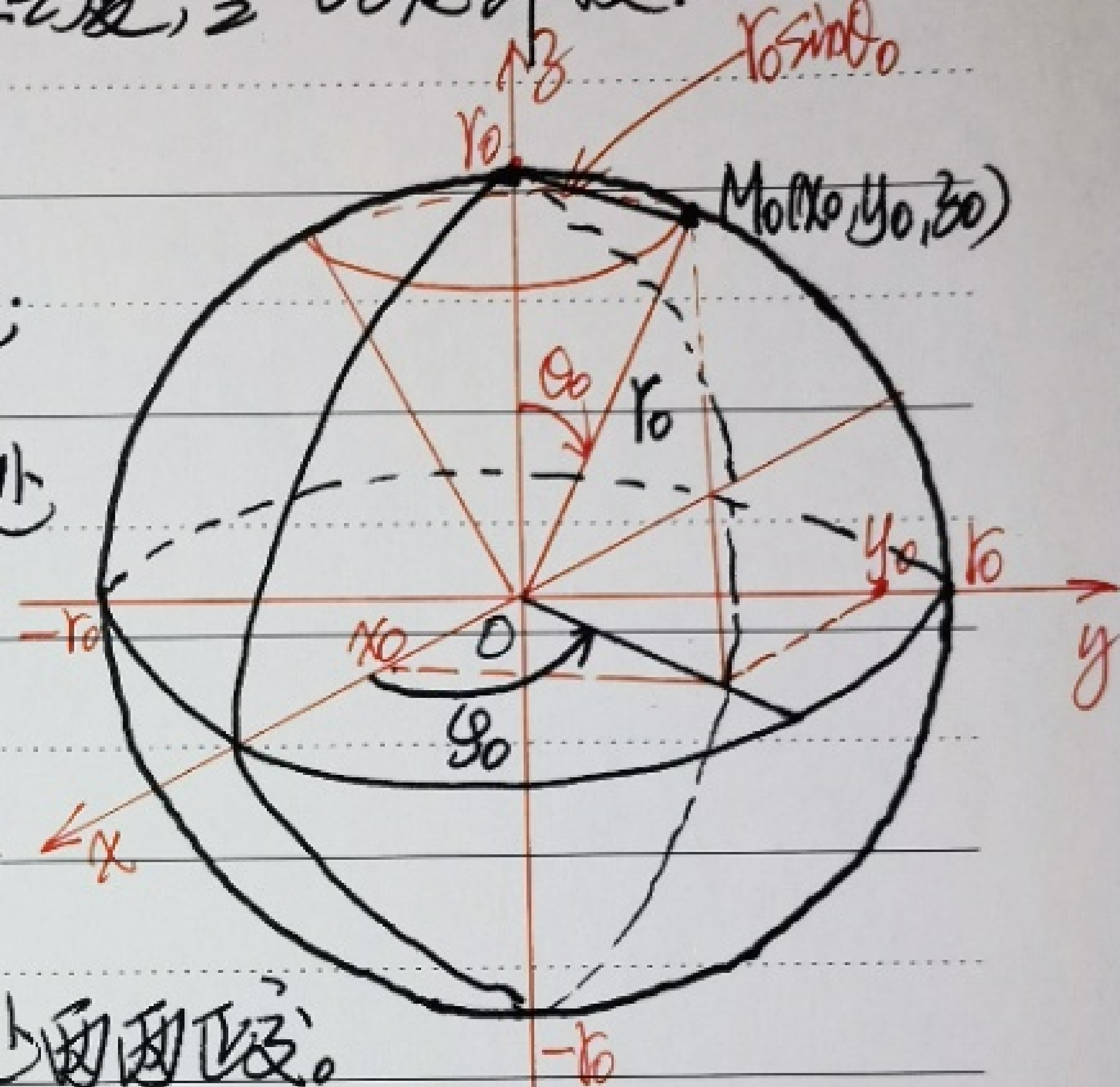
在条件 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1$ 下的条件极值，可得同样结果。(详解

见第15讲的例2解法。)

五. 设 (r_0,θ_0,φ_0) 是点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的球坐标，即有：

$$\begin{cases} x_0=r_0\sin\theta_0\cos\varphi_0 \\ y_0=r_0\sin\theta_0\sin\varphi_0 \\ z_0=r_0\cos\theta_0 \end{cases}, \quad r_0\in[0,+\infty);\ \theta_0\in[0,\pi],\ \varphi_0\in[0,2\pi].$$

φ_0 是经度，$\frac{\pi}{2}-\theta_0$ 是纬度.



证明:

(1) 三个球坐标曲面 $\Sigma_1: r=r_0$;

$\Sigma_2: \theta=\theta_0$; $\Sigma_3: \varphi=\varphi_0$ 在 M_0 处

两两正交; ($r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$)

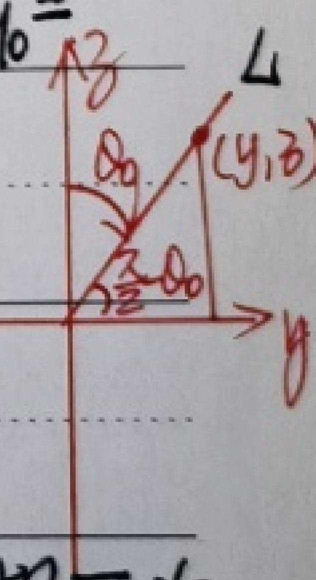
(2) 三条球坐标曲线 $\Gamma_1: \begin{cases}\Sigma_1\\ \Sigma_2\end{cases}$;

$\Gamma_2: \begin{cases}\Sigma_1\\ \Sigma_3\end{cases}$; $\Gamma_3: \begin{cases}\Sigma_2\\ \Sigma_3\end{cases}$ 在点 M_0 处两两正交。

证(1): ∵ Σ_1 的方程为 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=r_0$ 即 $x^2+y^2+z^2=r_0^2$. 令

$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-r_0^2$, 则 Σ_1 在 M_0 处的外法向为 $\vec{n}_1=\nabla F|_{M_0}=$

$(F_x,F_y,F_z)|_{M_0}=(2x_0,2y_0,2z_0)$; 而 Σ_2 的方程为 $\theta=\theta_0$



直线 L 的方程为 $\frac{z}{y}=\tan(\frac{\pi}{2}-\theta_0)=\cot\theta_0=$ 常数 k_1,

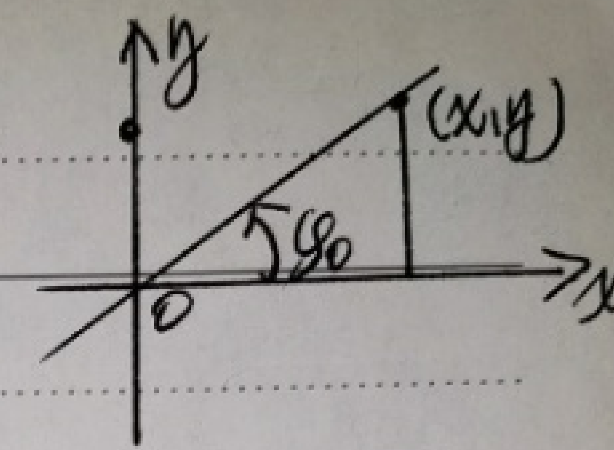
直线 $z=k_1y$ 绕 oz 轴旋转一周所得圆锥面 Σ_2, 故 Σ_2 为

$z=k_1(\pm\sqrt{x^2+y^2}) \Rightarrow \Sigma_2: z^2=k_1^2(x^2+y^2)$, 令 $E(x,y,z)=k_1^2x^2+k_1^2y^2-z^2$.

则 Σ_2 在 M_0 处的外法向为 $\vec{n}_2=\nabla E|_{M_0}=(2k_1^2x_0,2k_1^2y_0,-2z_0)$

而 Σ_3 为 $\varphi=\varphi_0$，从 $\frac{y}{x}=\tan\varphi_0 \triangleq k_2$ 则

半平面 Σ_3 的方程为 $k_2x-y=0 \Rightarrow$



令 $G(x,y,z)=k_2x-y$，则 Σ_3 在 M_0 处外法向为 $\vec{n_3}=\nabla G\big|_{M_0}$ $=(k_2,-1,0)$，由 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 同时属于 $\Sigma_1,\Sigma_2,\Sigma_3$ 知，

$$\begin{cases} x_0^2+y_0^2+z_0^2=r_0^2 \\ k_1^2x_0^2+k_1^2y_0^2-z_0=0 \\ k_2x_0-y_0=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=(2x_0,2y_0,2z_0)\cdot(2k_1^2x_0,2k_1^2y_0,-2z_0)=0 \\ \vec{n_1}\cdot\vec{n_3}=(2x_0,2y_0,2z_0)\cdot(k_2,-1,0)=0 \\ \vec{n_2}\cdot\vec{n_3}=(2k_1^2x_0,2k_1^2y_0,-2z_0)\cdot(k_2,-1,0)=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \vec{n_1}\perp\vec{n_2}$；$\vec{n_1}\perp\vec{n_3}$；$\vec{n_2}\perp\vec{n_3}$，故 $\Sigma_1,\Sigma_2,\Sigma_3$ 正交于点 M_0 处。

证(2)：设曲线 $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3$ 在 M_0 处的切向量为 $\vec{\tau_1},\vec{\tau_2},\vec{\tau_3}$，则

$\vec{\tau_1}\perp\vec{n_1}$，$\vec{\tau_1}\perp\vec{n_2}$，可取 $\vec{\tau_1}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}$，同理：$\vec{\tau_2}=\vec{n_1}\times\vec{n_3}$；$\vec{\tau_3}=\vec{n_2}\times\vec{n_3}$；

$\because \vec{n_1},\vec{n_2},\vec{n_3}$ 两两正交，故 $\vec{\tau_1}=\lambda_1\vec{n_3}$；$\vec{\tau_2}=\lambda_2\vec{n_2}$；$\vec{\tau_3}=\lambda_3\vec{n_1}$，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in R$.

由 $\vec{n_1},\vec{n_2},\vec{n_3}$ 两两正交知 $\vec{\tau_1},\vec{\tau_2},\vec{\tau_3}$ 两两正交 $\Leftrightarrow \Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3$ 正交于点 M_0.

(六). 设 (r_0,θ_0,z_0) 是点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的柱坐标，证明：

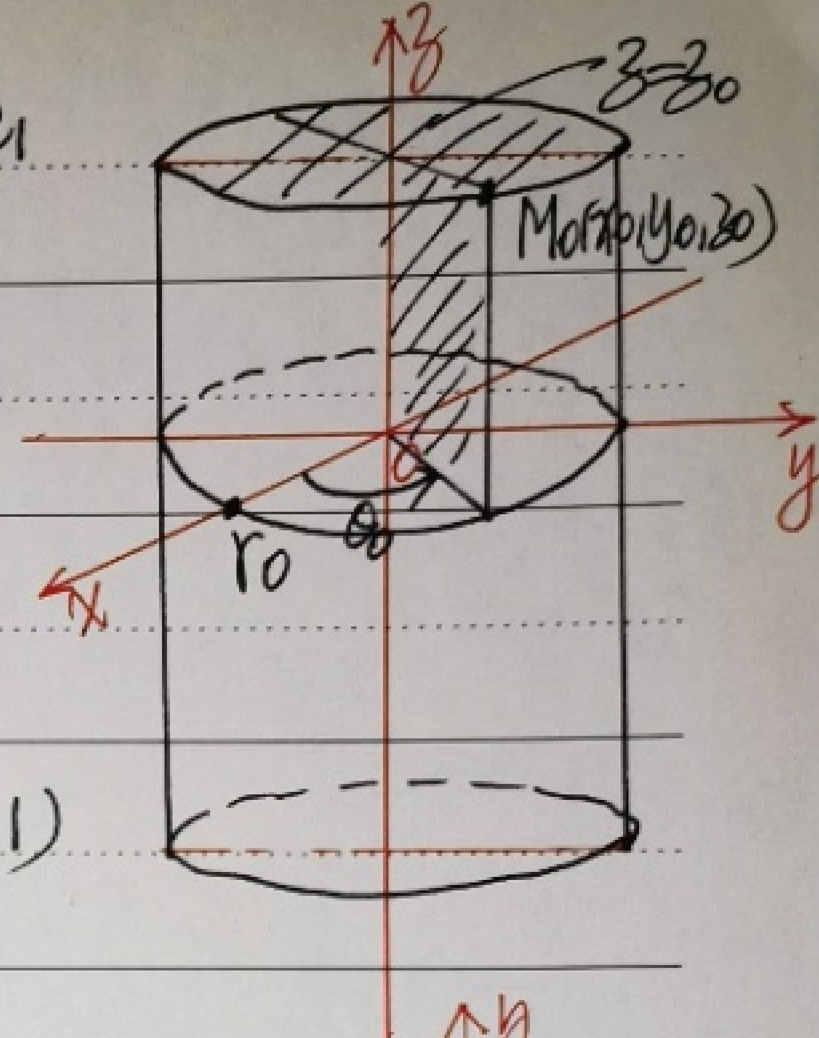
(1). 三个柱坐标曲面 $\Sigma_1: r=r_0$；$\Sigma_2: \theta=\theta_0$；$\Sigma_3: z=z_0$ 正交于点 M_0；

(2). 三条柱坐标曲线：$\Gamma_1: \begin{cases}\Sigma_1\\ \Sigma_2\end{cases}$；$\Gamma_2: \begin{cases}\Sigma_1\\ \Sigma_3\end{cases}$；$\Gamma_3: \begin{cases}\Sigma_2\\ \Sigma_3\end{cases}$ 也正交于点 M_0.

证(1)：$\because \Sigma_1: r=r_0$ 中的 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，$\therefore \Sigma_1$ 的直角坐标方程为 $F(x,y,z)=x^2+y^2-r_0^2=0$

Σ_1 在 M_0 处的外法向 $\vec{n_1}=\nabla F\big|_{M_0}=(2x,2y,0)\big|_{M_0}=(2x_0,2y_0,0)$.

Σ_1 是半径为 r_0 的圆柱面.



$\Sigma_2: \theta=\theta_0$ 是半平面，方程为 $\frac{y}{x}=\tan\theta_0 \triangleq k_1$

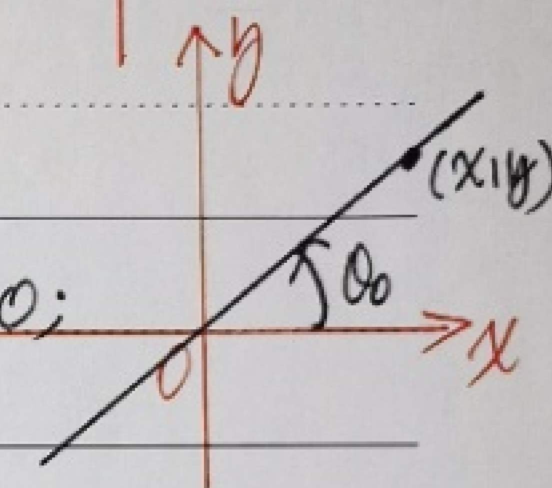
即 $k_1x-y=0$. 令 $E(x,y,z)=k_1x-y$ 则

Σ_2 在 M_0 的外法向 $\vec{n_2}=\nabla E|_{M_0}=(k_1,-1,0)$

$\Sigma_3: z=z_0$ 是水平面. 令 $G(x,y,z)=z-z_0$,

则 Σ_3 在 M_0 处的外法向 $\vec{n_3}=\nabla G|_{M_0}=(0,0,1)$

$\because \Sigma_1,\Sigma_3,\Sigma_2$ 同时经过 M_0，$\therefore \begin{cases} x_0^2+y_0^2-r_0^2=0 \\ k_1x_0-y_0=0 \\ z_0-z_0=0 \end{cases}$



且 $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=(2x_0,2y_0,0)\cdot(k_1,-1,0)=2k_1x_0-2y_0=2(k_1x_0-y_0)=0$;

$\vec{n_1}\cdot\vec{n_3}=(2x_0,2y_0,0)\cdot(0,0,1)=0$;

$\vec{n_2}\cdot\vec{n_3}=(k_1,-1,0)\cdot(0,0,1)=0$.

故 $\vec{n_1},\vec{n_2},\vec{n_3}$ 在 M_0 处两两正交 $\Longleftrightarrow \Sigma_1,\Sigma_2,\Sigma_3$ 两两正交于点 M_0.

而(2) 设 $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3$ 在 M_0 的切向量为 $\vec{\tau_1},\vec{\tau_2},\vec{\tau_3}$，则可取 $\begin{cases} \vec{\tau_1}=\vec{n_3} \\ \vec{\tau_2}=\vec{n_2} \\ \vec{\tau_3}=\vec{n_1} \end{cases}$

从而 $\vec{\tau_1},\vec{\tau_2},\vec{\tau_3}$ 在 M_0 处正交 $\Longleftrightarrow \Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3$ 在 M_0 处正交。

(2). ex9.5/5. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $z^3-2xz+y=0$ 所确定的隐函数且 $x=1,y=1$ 时 $z=1$，试将 $z(x,y)$ 在点 $M_0(1,1)$ 处展成二阶 Taylor 公式。

解: $z(x,y)$ 在 $M_0(1,1)$ 处的二阶 Taylor 公式为:

$$z(x,y)=z(1,1)+(x-1)z_x(1,1)+(y-1)z_y(y-1)+\frac{1}{2!}\left[(x-1)^2 z''_{xx}(1,1)+2(x-1)(y-1)z''_{xy}(1,1)+(y-1)^2 z''_{yy}(1,1)\right]+o(\rho^2),\ \rho=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}>0.$$

由方程 $z^3-2xz+y=0$ 两边分别对 x、y 求偏导：

$$\begin{cases} 3z^2z'_x-2z-2xz'_x=0 \\ 3z^2z'_y-2xz'_y+1=0 \end{cases}$$ (※1)，用 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$ 代入可得 $\begin{cases} z'_x(1,1)=2 \\ z'_y(1,1)=-1. \end{cases}$

(※1) 两边对 x、y 再分别求偏导：

$$\begin{cases} 6z(z'_x)^2+3z^2z''_{xx}-2z'_x-2z'_x-2xz''_{xx}=0 \\ 6zz'_xz'_y+3z^2z''_{xy}-2z'_y-2xz''_{xy}=0 \\ 6z(z'_y)^2+3z^2z''_{yy}-2xz''_{yy}=0 \end{cases}$$

再用 $x=1, y=1, z=1$ 及 $z'_x(1,1)=2, z'_y(1,1)=-1$ 代入

可得：$z''_{xx}(1,1)=16$；$z''_{xy}(1,1)=z''_{yx}(1,1)=10$；$z''_{yy}(1,1)=-6$。

故 $z(x,y)=1+2(x-1)-(y-1)+\frac{1}{2!}[16(x-1)^2+2\times10(x-1)(y-1)-6(y-1)^2]+o(\rho^2)$.

(2). Ex9.5/16：已知平行六面体所有棱长之和为 $12a$，求其最大体积。

解：设平行六面体 Ω 的三条棱对应向量为 $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$，且 $\begin{cases} |\vec{x}|=x>0 \\ |\vec{y}|=y>0 \\ |\vec{z}|=z>0. \end{cases}$

且 $V(\Omega)=|(\vec{x}\times\vec{y})\cdot\vec{z}|=\left||\vec{x}\times\vec{y}||\vec{z}|\cos(\widehat{\vec{x}\times\vec{y},\vec{z}})\right|\le|\vec{x}\times\vec{y}||\vec{z}|\cdot|$

$=\left||\vec{x}||\vec{y}|\sin(\widehat{\vec{x},\vec{y}})|\vec{z}|\right|\le|\vec{x}||\vec{y}||\vec{z}|=xyz\le\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$,

又 $4(x+y+z)=12a$，$\therefore x+y+z=3a$. 故 $V(\Omega)\le\left(\frac{3a}{3}\right)^3=a^3$.

等号成立，当且仅当 $x=y=z=a$，即平行六面体为正方体时，

且棱长是 a 的

其体积 $V(\Omega)$ 最大，为 a^3。

(九). Ex9.5/20：在旋转椭球面 Σ：$\frac{x^2}{4}+y^2+z^2=1$ 上求距平面 Π：$x+y+2z=9$ 最远和最近的点。

解法(1)：过 $\Sigma: \frac{x^2}{4}+y^2+z^2=1$ 上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 作切平面 $\pi_{切}$：

$\frac{x x_0}{4}+y y_0+z z_0=1$，设 $\pi_{切}$ // 已知平面 π，则 $(\frac{x_0}{4},y_0,z_0)$ // $(1,1,2)$

$\Leftrightarrow \frac{\frac{x_0}{4}}{1}=\frac{y_0}{1}=\frac{z_0}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_0=4y_0 \\ z_0=2y_0 \end{cases}$ 代入 $\frac{x_0^2}{4}+y_0^2+z_0^2=1$ 解得 $\begin{cases} y_0=\pm\frac{1}{3} \\ x_0=\pm\frac{4}{3}, \\ z_0=\pm\frac{2}{3}. \end{cases}$

Σ 上的点 $M_1(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ 到 π 的距离为

$d_1=\left|\frac{4}{3}+\frac{1}{3}+2\times\frac{2}{3}-9\right|/\sqrt{1^2+1^2+2^2}=6/\sqrt{6}=\sqrt{6}$；$\Sigma$ 上点 $M_2(-\frac{4}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$ 到

π 的距离为 $d=\left|-\frac{4}{3}-\frac{1}{3}+2(-\frac{2}{3})-9\right|/\sqrt{1^2+1^2+2^2}=2\sqrt{6}$.

故 Σ 上点 $M_2(-\frac{4}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$，$M_1(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ 分别是到 π 最远的点与最近的点。

解法(2)：条件极值法：取 $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma$，则 M_0 到 π 的距离 $d=$ $|x_0+y_0+2z_0-9|/\sqrt{1^2+1^2+2^2}$，取目标函数为 $(x_0+y_0+2z_0-9)^2$，条件是

$\frac{x_0^2}{4}+y_0^2+z_0^2=1$，作 $L(x_0,y_0,z_0,\lambda)=(x_0+y_0+2z_0-9)^2+\lambda(\frac{x_0^2}{4}+y_0^2+z_0^2-1)$，

从 $\begin{cases} L'_{x_0}=0 \\ L'_{y_0}=0 \\ L'_{z_0}=0 \\ L'_{\lambda}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=\pm\frac{4}{3} \\ y_0=\pm\frac{1}{3} \\ z_0=\pm\frac{2}{3} \end{cases}$，余同上。(略)。

(十) 作业：

ex9.5：5；~~6~~；7(5)；8；10(3)；11(2)；16；17；19.

(注：一切二次曲线：$ax^2+by^2+cx+dy+e=0$，$a^2+b^2>0$，其上一点 $M_0(x_0,y_0)$ 处

的切线方程为：$axx_0+byy_0+c\frac{x+x_0}{2}+d\frac{y+y_0}{2}+e=0$，

其中，a,b,c,d,e 为常数)，第17题可用上这里的结论！

第16讲附页：

设 $z=f(x,y)\in C^1(D)$，D是区域，$M_0(x_0,y_0)\in D$，求曲面

$\Sigma: z=f(x,y)$ 在点 M_0 处的切平面 $\pi_切$ 与法线 N.

解：(1) 令 $F(x,y,z)=f(x,y)-z$，则 $F\in C^1$ 且 $\pi_切$ 的法向量

$\vec{n}(M_0)=\nabla F\big|_{M_0}=(f'_x(x,y),f'_y(x,y),-1)\big|_{M_0}=(f'_x(M_0),f'_y(M_0),-1)$.

由 $\pi_切$ 的点法式，有 $\pi_切$ 为：

$$f'_x(M_0)(x-x_0)+f'_y(M_0)(y-y_0)+(-1)(z-z_0)=0 \qquad (*_1).$$

过切点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 且垂直于 $\pi_切$ 的法线 N 为：

$$\frac{x-x_0}{f'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{-1}. \qquad (*_2).$$

由 $(*_1)$ 知，切平面上的 z 的增量 $\Delta z_切=z-z_0=f'_x(M_0)(x-x_0)+$

$f'_y(M_0)(y-y_0)=f'_x(M_0)\Delta x+f'_y(M_0)\Delta y=dz\big|_{M_0}$

而曲面 $z=f(x,y)$ 在 $M_0(x_0,y_0)$ 处的全增量：

$\Delta z_曲=f(x,y)-f(x_0,y_0)=f'_x(M_0)\Delta x+f'_y(M_0)\Delta y+o(\rho)$，其 $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

ρ 较小时，$\Delta z_曲\approx f'_x(M_0)\Delta x+f'_y(M_0)\Delta y=dz\big|_{M_0}=\Delta z_切$，即可微函数在局部（即 ρ 较小时），曲面可用切平面来代替！相差的只是一个高阶无穷小。