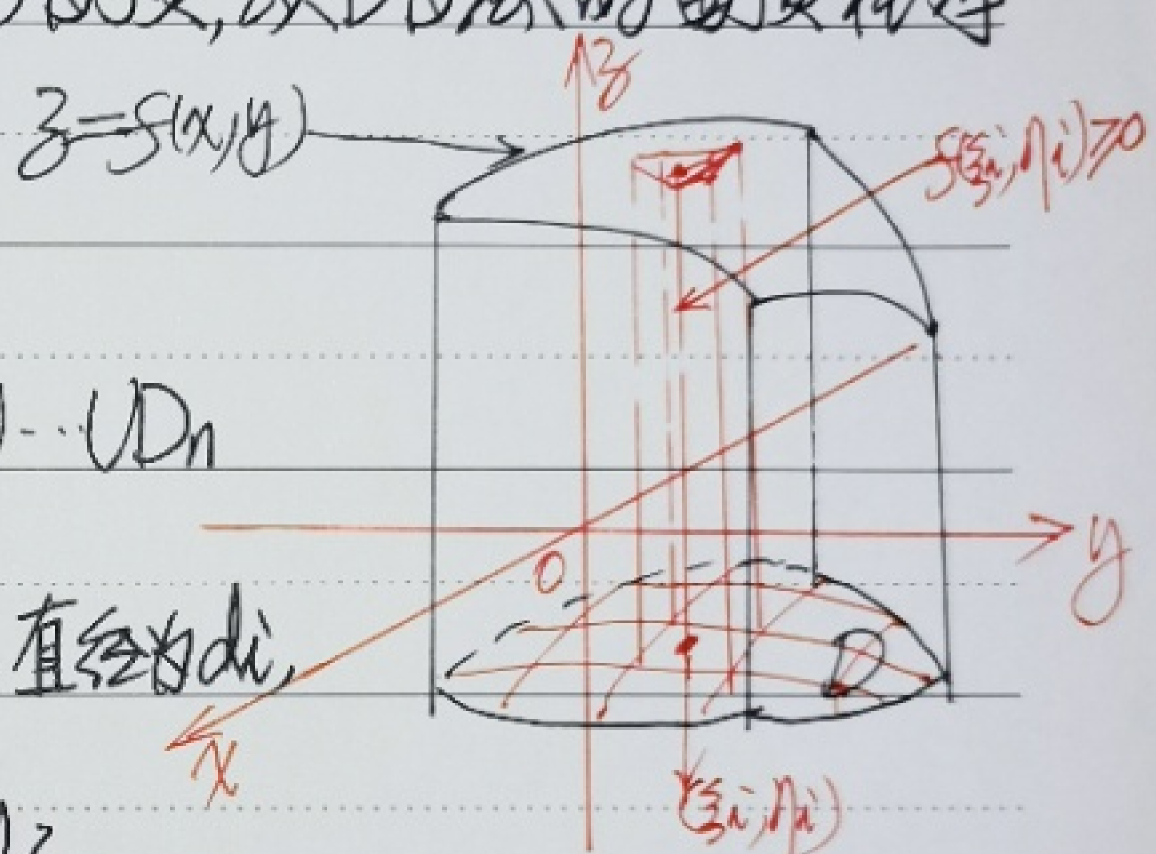
第18讲：二重积分的概念与"十大性质"

二重积分：double integral

三重积分：triple integral

(一) 二重积分的概念：

例1. 设有曲面Σ：$z=f(x,y)\geq 0$，$(x,y)\in D$，且f在有界闭区域D上有界。求以曲面$z=f(x,y)$为顶，以D为底的曲顶柱体Ω的体积$V(\Omega)$。



解 (I) 分割D：$D=D_1\cup D_2\cup\cdots D_i\cup\cdots\cup D_n$

设第i个子区域D_i的面积为$\Delta\sigma_i$，直径为d_i，

$i=1,2,\cdots,n$ 且 $\lambda=\max\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$.

局部线性化。

(II) 近似：任取点$(\xi_i,\eta_i)\in D_i$，作$f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$，$i=1,2,3,\cdots,n$.

(III) 求和：$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i \approx V(\Omega)$.

(IV) 极限：若$\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$存在且唯一，即极限值与分法及$(\xi_i,\eta_i)$的取法无关，则称此极限为$\Omega$的体积或函数$f(x,y)$在有界闭区域$D$上的二重积分，记作：

$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \lim\limits_{\lambda\to0^+}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i = V(\Omega)$（二重积分的几何意义）

对于一般的二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$，通常要求 f 在 D 中连续，此时，f 在 D 中必有界且上述极限必存在且唯一。不必再要求 $f\geq0$。当上述极限存在唯一时，称 f 是 D 中 Riemann 可积的，记作：$f\in R(D)$。当 $f\in C(D)$ 时，必有 $f\in R(D)$。反之未必。

当 $f(x,y)\geq0$，$\forall(x,y)\in D$，且将 $f(x,y)$ 看作点 (x,y) 处的面密度时，$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 就是平面薄片 D 的总质量 $M(D)$。（二重积分的物理意义）

（三）二重积分的"十大性质"（设 $f,g\in R(D)$，D 是有界闭区域，C_1,C_2 为常数）

性质(1)：$\iint\limits_D 1d\sigma = D$ 的面积 $S(D)$。

证：左边 $=\lim\limits_{\lambda\to0^+}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i = \lim\limits_{\lambda\to0^+}\sum\limits_{i=1}^{n} 1\cdot\Delta\sigma_i = \lim\limits_{\lambda\to0^+} S(D) = S(D) =$ 右边

性质(2)：$\iint\limits_D (f\pm g)d\sigma = \iint\limits_D fd\sigma \pm \iint\limits_D gd\sigma$（二重积分关于被积函数的可加性，可推广到任意有限个函数）

证：左边 $=\lim\limits_{\lambda\to0^+}\sum\limits_{i=1}^{n}(f(\xi_i,\eta_i)\pm g(\xi_i,\eta_i))\Delta\sigma_i = \lim\limits_{\lambda\to0^+}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i \pm \lim\limits_{\lambda\to0^+}\sum\limits_{i=1}^{n} g(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$

$= \iint\limits_D fd\sigma \pm \iint\limits_D gd\sigma$

性质(3)：对 $\forall f\in R(D)$，都可将 f 视作此类函数，因而 $\iint\limits_D f\,d\sigma$

都可用曲顶柱体之体积这个几何意义来理解。

证：$\because f\in R(D)$，$\therefore f$ 在 D 上必有界 $\therefore \exists M>0$ 使 $-M\leq f(x,y)\leq M$，

$\forall (x,y)\in D$. $\Rightarrow f(x,y)+M\geq 0$ 恒成立，$\forall (x,y)\in D$，而：

$$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma=\iint\limits_D\big((f(x,y)+M)-M\big)\,d\sigma=\iint\limits_D(f(x,y)+M)\,d\sigma-\iint\limits_D M\,d\sigma$$

性质(4) $\iint\limits_{D_1\cup D_2} f(x,y)\,d\sigma=\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,d\sigma+\iint\limits_{D_2} f(x,y)\,d\sigma$ （二重积分关于

积分区域的可加性。可推广到任意有限个区域的情形）

性质(5). $\iint\limits_D c_1 f(x,y)\,d\sigma=c_1\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma$.

性质(2),(5)可合并为：$\iint\limits_D(c_1 f+c_2 g)\,d\sigma=c_1\iint\limits_D f\,d\sigma+c_2\iint\limits_D g\,d\sigma$

（称之为二重积分的线性性质，可推广到任意有限个函数）

性质(6)（保序性）：若 $f(x,y)\geq g(x,y)$，$\forall (x,y)$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma\geq\iint\limits_D g(x,y)\,d\sigma$$

证：$\because f(\xi_i,\eta_i)\geq g(\xi_i,\eta_i)\Rightarrow \lim\limits_{\lambda\to 0^+}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i\geq\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\sum\limits_{i=1}^{n} g(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$

$$\Rightarrow \iint\limits_D f\,d\sigma\geq\iint\limits_D g\,d\sigma$$

性质(7)（保号性）：若 $f(x,y)\geq 0$，$\forall(x,y)\in D$，则 $\iint\limits_D f d\sigma \geq 0$.

证：在性质(6)中取 $g(x,y)\equiv 0$，$\forall(x,y)\in D$.

性质(8) 积分估值公式：设 m_1, m_2 是 f 在 D 中的下确界与上确界，则 $m_1\leq f(x,y)\leq m_2$，$\forall(x,y)\in D$. 则

$$m_1 S(D)\leq \iint\limits_D f(x,y)d\sigma \leq m_2 S(D).$$

性质(9)（二重积分中值Th）：设 f 在 D 中连续，则 f 在 D 中必取到最小值 m，最大值 M：$m\leq f(x,y)\leq M$，$\forall(x,y)\in D \Longrightarrow$

$m S(D)\leq \iint\limits_D f(x,y)d\sigma \leq M S(D) \Leftrightarrow m\leq \dfrac{\iint\limits_D f d\sigma}{S(D)}\leq M$. 由 f 在 D 中的介值性知，$\exists M_0(x_0,y_0)\in D$，使 $f(M_0)=\iint\limits_D f d\sigma / S(D) \Leftrightarrow$

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = f(M_0)S(D).\quad M_0\in D.$$

性质(10)（绝对可积性）：$\left|\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\right| \leq \iint\limits_D |f(x,y)|d\sigma$.

证：$\because -|f(x,y)|\leq f(x,y)\leq |f(x,y)|$，$\forall(x,y)\in D$. $\therefore$

$$-\iint\limits_D |f(x,y)|d\sigma \leq \iint\limits_D f(x,y)d\sigma \leq \iint\limits_D |f(x,y)|d\sigma \Leftrightarrow \left|\iint\limits_D f d\sigma\right| \leq \iint\limits_D |f|d\sigma$$

(三)例题：

例1. 求椭球体 $\Omega: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$ 的体积 $V(\Omega)$

例2. 设 $f(x,y)\in C(D)$：$D\begin{cases} g_1(x)\le y\le g_2(x) \\ a\le x\le b. \end{cases}$，$g_1,g_2\in C[a,b]$.

证明：$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b\left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\right)dx \triangleq \int_a^b dx\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy$，(式1)

例3. 设 $f(x,y)\in C(D)$：$D\begin{cases} \varphi_1(y)\le x\le \varphi_2(y) \\ c\le y\le d, \end{cases}$，$\varphi_1,\varphi_2\in C[c,d]$.

证明：$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_c^d\left(\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx\right)dy \triangleq \int_c^d dy\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx$，(式2)

(式1)，(式2)是计算二重积分的两个重要公式，分别称为"先y后x法"，"先x后y法"。

例4：计算：$I=\iint\limits_D \cos(x+y)dxdy$，D由 $x=0$，$x=y$，$y=\pi$ 围成的区域。

(四)作业：ex10.1

1/(1)，(3)，(5)；2/(1)，(2)，(5)，(6)，(8)；4.

例5. 计算 $I=\iint\limits_D \frac{\sin y}{y}d\sigma$，D由 $y=x$，$y^2=x$ 围成.

$=\int_0^1\left(\int_{y^2}^{y}\frac{\sin y}{y}dx\right)dy$

$=\int_0^1\frac{\sin y}{y}(y-y^2)dy$

$=\int_0^1(1-y)\sin y\,dy$

$=\int_0^1(y-1)d\cos y=$

$=(y-1)\cos y\Big|_0^1-\int_0^1\cos y\,dy$

$=1-\sin 1.$

(五)二重积分的计算与极坐标变换.

第19讲：