第15讲：函数的条件极值及其应用

(一) 求条件极值的 Lagrange 乘数法：

(1) 设 D 是 R^2 中的开区域，$f(x,y)\in C^1(D)$，$g(x,y)\in C^1(D)$。

已知 $M_0(x_0,y_0)\in D$ 是 $z=f(x,y)$ 的一个极值点，且方程 $g(x,y)=0$

满足 $g(M_0)=0$，$g'_y(M_0)\neq 0$。从而方程 $g(x,y)=0$ 在 M_0 附近

确定了隐函数：$y=h(x)$，且 $y_0=h(x_0)$，$h'(x_0)=y'(x_0)=-\dfrac{g'_x(M_0)}{g'_y(M_0)}$

现在来找在条件 $g(x,y)=0$ 的约束下，目标函数 $z=f(x,y)$ 在

点 M_0 处取到极值的必要条件与充分条件。

已知 $f(x_0,y_0)$ 是 $f(x,y)$ 的一个极值，则一元可微函数

$z(x)=f(x,h(x))$ 在 x_0 处同样取到极值，由 Fermat 定理：

$z'(x_0)=0$，即 $f'_x(x_0,h(x_0))+f'_y(x_0,h(x_0))y'(x_0)=0$，即

$f'_x(M_0)+f'_y(M_0)\left(-\dfrac{g'_x(M_0)}{g'_y(M_0)}\right)=0$，设 $-\dfrac{f'_y(M_0)}{g'_y(M_0)}=\lambda$，则有：

$$\begin{cases} f'_x(M_0)+\lambda g'_x(M_0)=0 \\ f'_y(M_0)+\lambda g'_y(M_0)=0 \\ g(M_0)=0 \end{cases} \quad (*_1) \qquad (1).$$

现假设 $L(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$，$(x,y)\in D$，$\lambda$ 是常数.

$X^T(HL(M_0))X$

则(式1)等价于: $\begin{cases} L'_x(M_0)=0 \\ L'_y(M_0)=0 \\ \varphi(M_0)=0 \end{cases}$ (式2)　　$X=\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}\neq 0$，$X^T=(h,k)$.

称 $L(x,y)$ 为目标函数 $f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的 Lagrange 函数，λ 为 Lagrange 乘数. 而(式2)即为 f 在 M_0 处取极值的必要条件.

令 $A=L''_{xx}(M_0)$，$B=L''_{xy}(M_0)$，$C=L''_{yy}(M_0)$，$HL(M_0)=\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$.

则 $HL(M_0)>0\ (<0)$ 时，$f(M_0)$ 为 f 的极小(大)值. L 的 Hessian 矩阵正定(负定)是 f 在 M_0 处取到极值的充分条件. 理由如下:

$$f(M)-f(M_0)=L(M)-L(M_0)=\frac{1}{2}HL(M_0)+o(\rho^2) \qquad (式3)$$

(2). 上述定理可推广到一般多元函数在已知条件下的条件极值情形。如 $u=f(x,y,z)$ 在条件 $\begin{cases} \varphi_1(x,y,z)=0 \\ \varphi_2(x,y,z)=0 \end{cases}$ 下的条件极值问题，其中 $f,\varphi_1,\varphi_2\in C^2(D)$，$D$ 是 R^3 中的区域且 $\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(y,z)}\neq 0$.

(1) 构造拉氏函数: $L(x,y,z)=f(x,y,z)+\varphi_1(x,y,z)\lambda_1+\varphi_2(x,y,z)\lambda_2$

λ_1,λ_2 为常数，$(x,y,z)\in D$.

(2).

(2°) 求出 $L(x,y,z)$ 的驻点 M_0：$\begin{cases} L'_x(M_0)=0 \\ L'_y(M_0)=0 \\ L'_z(M_0)=0 \end{cases}$ 及 $\begin{cases} \varphi_1(M_0)=0 \\ \varphi_2(M_0)=0, \end{cases}$ (解)

(3°) 若 $HL(M_0)>0\ (<0)$，则 $f(M_0)$ 为 f 的极小(大)值。

在解应用题时，目标函数 $u=f(x,y,z)$ 通常易求，但求 $HL(M_0)$ 比较繁。此时，若位于 D 的内部的驻点 M_0 是唯一的，且 f 的最值不可能在边界 ∂D 中取到，则 f 的最值只能在 D 的内部取到。因此 f 的这个最值也是 f 的极值，由 Fermat 定理必有极值点是驻点的结论，而现在驻点又是唯一的，因此，通过必要条件(解)求出的唯一驻点 M_0，恰好是要找的 f 在 D 内的最值点，此时，可省略去求 $HL(M_0)$ 这一步。

(三) 例题：

例1. 将正数 a 分成 n 个正数之和：$x_1+x_2+\cdots+x_n=a$，$x_i>0$，求 $u=x_1x_2x_3\cdots x_n$ 的最大值；并证明以下的平均值不等式：

$$\overline{H}=\left(\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}{n}\right)^{-1}\le\overline{G}=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\le\overline{A}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\le$$

$\mathrm{RMS}=\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}}$，RMS还可以换为m次方根：$(m>1)$

$\left(\frac{x_1^m+x_2^m+\cdots+x_n^m}{n}\right)^{\frac{1}{m}}$，（ch9综合/16），其中，$x_1>0, x_2>0, \cdots, x_n>0$。

例2. 求 $V(\Omega)=\frac{a^2b^2c^2}{6x_0y_0z_0}$ 在条件 $\left(\frac{x_0}{a}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c}\right)^2=1$ 下的条件最值 $(V(\Omega))_{\min}$.（注：$x_0>0, y_0>0, z_0>0$）

例3. 证明点 $Q(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 π：$Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为 $d=|Ax_0+By_0+Cz_0+D|/\sqrt{A^2+B^2+C^2}$.

例4. 求函数 $z=f(x,y)=xy$ 在条件：$(x-1)^2+y^2-1=0$ 下的条件极值.

例5. 求原点 $O(0,0,0)$ 到曲面 Σ：$(x-y)^2-z^2=1$ 的最短距离。

续例1：用Lagrange乘数法：

设 $L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda)=x_1x_2\cdots x_n+\lambda(x_1+x_2+\cdots+x_n-a)$，$x_i>0$.

$$
\text{令}\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x_1}=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2}=0\\ \quad\vdots\\ \dfrac{\partial L}{\partial x_n}=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=0\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}x_2x_3\cdots x_n+\lambda=0\\ x_1x_3\cdots x_n+\lambda=0\\ \quad\vdots\\ x_1x_2\cdots x_{n-1}+\lambda=0\\ x_1+x_2+\cdots+x_n=a\end{cases}
$$

$\Rightarrow x_1=x_2=\cdots=x_n$

$x_1+x_2+\cdots+x_n=a \Rightarrow x_{10}=x_{20}=\cdots=x_{n0}=\dfrac{a}{n}$.

即得唯一驻点 $M_0(\frac{a}{n},\frac{a}{n},\cdots,\frac{a}{n})$.

且 $u=x_1x_2\cdots x_n$ 可微，u 的最大值必在内点处取到，从而最大值必是极大值，由Fermat Th，最大值点必是驻点，现驻点唯一，故 $M_0(\frac{a}{n},\frac{a}{n},\cdots\frac{a}{n})$ 即为所求的 $u=x_1x_2\cdots x_n$ 的最大值点，即

$$u_{max}=\frac{a}{n}\frac{a}{n}\cdots\frac{a}{n}=\left(\frac{a}{n}\right)^n=\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n \text{ 即}$$

$$u=x_1x_2\cdots x_n\le u_{max}=\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n \Leftrightarrow \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\le\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

对正数 $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\cdots\frac{1}{x_n}$，援用上述平均值不等式，有

$$\sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_n}} \le \frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}{n} \Leftrightarrow \left(\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}{n}\right)^{-1} \le \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

最后利用Cauchy不等式：$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)$

取 $a_i=x_i$，$b_i\equiv1$，则有 $\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot1\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)n \Rightarrow$

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot1\right)^2}{n^2} \le \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)n}{n^2} = \frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n} \Rightarrow$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \le \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}}\text{，最终有：}$$

$$\left(\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}{n}\right)^{-1} \le \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \le \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \le \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}}$$

即 $\overline{H}\le\overline{G}\le\overline{A}\le RMS$.

例2：方法(一)：平均值不等式法：

$$V(\Omega)=\frac{a^2b^2c^2}{6}\frac{1}{x_0y_0z_0} = \frac{abc}{6}\frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^2}\frac{y_0^2}{b^2}\frac{z_0^2}{c^2}}}$$

而 $\sqrt[3]{\frac{x_0^2}{a^2}\cdot\frac{y_0^2}{b^2}\cdot\frac{z_0^2}{c^2}} \le \frac{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{x_0^2}{a^2}\frac{y_0^2}{b^2}\frac{z_0^2}{c^2} \le \left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$

故 $V(\Omega) \geqslant \frac{abc}{6}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{27}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}abc$.

即 $(V(\Omega))_{min}=\frac{\sqrt{3}}{2}abc$ 且等号当且仅当 $\frac{x_0^2}{a^2}=\frac{y_0^2}{b^2}=\frac{z_0^2}{c^2}=\frac{1}{3}$ 时

成立，即当 $x_0=\frac{a}{\sqrt{3}}$，$y_0=\frac{b}{\sqrt{3}}$，$z_0=\frac{c}{\sqrt{3}}$ 时，$V(\Omega)_{min}=\frac{\sqrt{3}}{2}abc$

方法(二). Lagrange 乘数法:

设 $L(x_0,y_0,z_0,\lambda)=x_0y_0z_0+\lambda\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1\right)$, $x_0>0, y_0>0, z_0>0$.

令 $\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x_0}=0\\ \frac{\partial L}{\partial y_0}=0\\ \frac{\partial L}{\partial z_0}=0\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0z_0+2\lambda\frac{x_0}{a^2}=0 \\ x_0z_0+2\lambda\frac{y_0}{b^2}=0 \\ x_0y_0+2\lambda\frac{z_0}{c^2}=0 \\ \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1 \end{cases}$

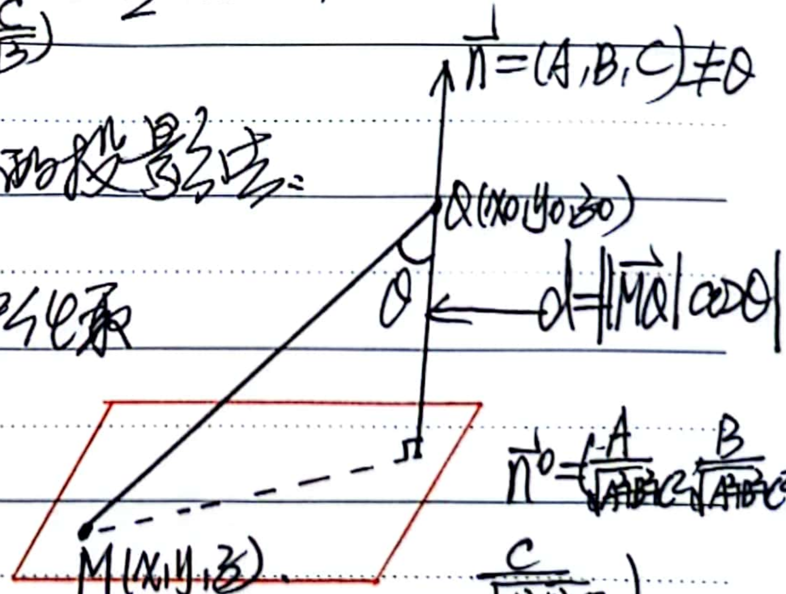
$\Rightarrow -2\lambda\frac{x_0^2}{a^2}=x_0y_0z_0=-2\lambda\frac{y_0^2}{b^2}=-2\lambda\frac{z_0^2}{c^2}$ 即 $\frac{x_0^2}{a^2}=\frac{y_0^2}{b^2}=\frac{z_0^2}{c^2}$

$\Rightarrow \frac{x_0^2}{a^2}=\frac{1}{3}, \frac{y_0^2}{b^2}=\frac{1}{3}, \frac{z_0^2}{c^2}=\frac{1}{3}$.

唯一驻点 $M_0(a/\sqrt{3}, b/\sqrt{3}, c/\sqrt{3})$, 即是目标函数 $x_0y_0z_0$ 的最大值点, 从而是 $V(\Omega)=\frac{a^2b^2c^2}{6}\frac{1}{x_0y_0z_0}$ 的最小值点. 即

$V(\Omega)_{min}=\frac{a^2b^2c^2}{6}\frac{1}{\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{b}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{c}{\sqrt{3}}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{2}abc$.

例3: 方法(一): 向量的投影法:



$\vec{n}^0=\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)$.

在平面 Π: $Ax+By+Cz+D=0$ 中任取一点 $M(x,y,z)$, 则

$Ax+By+Cz=-D$, 且

$d=||\vec{MQ}|\cos\theta|=||\vec{MQ}||\vec{n}^0|\cos\theta|=|\vec{MQ}\cdot\vec{n}^0|=\left|(x_0-x,y_0-y,z_0-z)\cdot\left(\frac{A}{\sqrt{\ }},\frac{B}{\sqrt{\ }},\frac{C}{\sqrt{\ }}\right)\right|$

$=|A(x_0-x)+B(y_0-y)+C(z_0-z)|/\sqrt{A^2+B^2+C^2}=|Ax_0+By_0+Cz_0+D|/\sqrt{A^2+B^2+C^2}$. 证

方法(三): Lagrange 乘数法. 取目标函数为 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$.

条件: $Ax+By+Cz+D=0$.

设 $L(x,y,z,\lambda)=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2+\lambda(Ax+By+Cz+D)$

$$\text{令}\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=0\\ \frac{\partial L}{\partial y}=0\\ \frac{\partial L}{\partial z}=0\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2(x-x_0)+\lambda A=0 & (1)\Rightarrow A(x-x_0)+\frac{\lambda}{2}A^2=0\\ 2(y-y_0)+\lambda B=0 & (2)\Rightarrow B(y-y_0)+\frac{\lambda}{2}B^2=0\\ 2(z-z_0)+\lambda C=0 & (3)\Rightarrow C(z-z_0)+\frac{\lambda}{2}C^2=0\\ Ax+By+Cz+D=0 & (4)\end{cases}$$

从(1),(2),(3)得: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=-\frac{\lambda}{2}(A^2+B^2+C^2)$

即 $Ax+By+Cz-(Ax_0+By_0+Cz_0)=-\frac{\lambda}{2}(A^2+B^2+C^2)\Leftrightarrow$

$-D-(Ax_0+By_0+Cz_0)=-\frac{\lambda}{2}(A^2+B^2+C^2)\Rightarrow\frac{\lambda}{2}=\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{A^2+B^2+C^2}$.

从(1),(2),(3)还可得:

$d^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=(-\frac{\lambda}{2}A)^2+(-\frac{\lambda}{2}B)^2+(-\frac{\lambda}{2}C)^2=(\frac{\lambda}{2})^2(A^2+B^2+C^2)$

$=\frac{(Ax_0+By_0+Cz_0+D)^2}{(A^2+B^2+C^2)^{\cancel{2}}}\cdot\cancel{(A^2+B^2+C^2)}$

$\Rightarrow d=|Ax_0+By_0+Cz_0+D|/\sqrt{A^2+B^2+C^2}$.

作业: §9.5

10(1),(4); 12; 15; 18; 19; 20.

解例(4): 令 $F(x,y) = xy + \lambda[(x-1)^2 + y^2 - 1]$ 且令 $\begin{cases} F'_x = 0 \\ F'_y = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} y + 2\lambda(x-1) = 0 & (1) \\ x + 2\lambda y = 0 & (2) \\ (x-1)^2 + y^2 - 1 = 0 & (3) \end{cases}$ 解得 3个驻点: $M_1(0,0)$, $M_2(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $M_3(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$

先从(1),(2)解得: $x = \frac{4\lambda^2}{4\lambda^2-1}$, $y = \frac{-2\lambda}{4\lambda^2-1}$ 代入(3)得 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, 回代到 x, y)

因 $z = xy$ 在闭集 $D = \{(x,y) \mid (x-1)^2 + y^2 = 1\}$ 上连续, 从而可取到最值.

且最值点都是极值点, 且是可能极点, 从而都是驻点. 因此,

$z_2 = \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ 是极大值同时也是最大值; $z_3 = \frac{3}{2} \times (-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$

是极小值同时也是最小值。而 $z_1 = 0 \times 0 = 0$ 不是极值。

解例(5): 设 $Q(x,y,z)$ 是 $\Sigma: (x-y)^2 - z^2 = 1$ 上任一点, 则 $|QO|^2 = d^2 = x^2 + y^2 + z^2$

作 $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda[(x-y)^2 - z^2 - 1]$, 令 $\begin{cases} F'_x = 0 \\ F'_y = 0 \\ F'_z = 0 \\ (x-y)^2 - z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} 2x + 2\lambda(x-y) = 0 & (1) \\ 2y - 2\lambda(x-y) = 0 & (2) \\ 2z - 2\lambda z = 0 & (3) \\ (x-y)^2 - z^2 = 1 & (4) \end{cases}$

由(3) $z(1-\lambda) = 0$. 若 $\lambda = 1$ 则 $x = y = 0$, 方程组无解. 故 $\lambda \neq 1 \Rightarrow z = 0$. 解得 $\begin{cases} x = \pm\frac{1}{2} \\ y = \mp\frac{1}{2} \end{cases}$,

$M_1(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$ 与 $M_2(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ 是所有可能的极值点.

且从 $|OM_1|^2 = (\frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2})^2 + 0^2 = \frac{1}{2} = |OM_2|^2$ 知, M_1, M_2 都是最小值点, 且 $d = \sqrt{\frac{1}{2}}$

为 $O(0,0,0)$ 到 Σ 的最短距离。