第12讲：多元函数微分学的几何应用

(一) 空间曲线的切线与法平面

(tangent)　(normal plane)

(1). 设Γ的方程为向量式：$\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))\in C^1(I)$

且 $\vec{r}'(t)\neq 0$，称这样的曲线Γ为光滑曲线。由有限个光滑曲线连接而成的曲线称为逐段光滑曲线。

设 $M_0(x(t_0),y(t_0),z(t_0))$，$M(x(t_0+\Delta t),y(t_0+\Delta t),z(t_0+\Delta t))\in\Gamma$，

若极限 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\vec{r}(M)-\vec{r}(M_0)}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{(x(t_0+\Delta t)-x(t_0),\,y(t_0+\Delta t)-y(t_0),\,z(t_0+\Delta t)-z(t_0))}{\Delta t}$

$=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))\triangleq\vec{\tau}$ 存在，则称 $\vec{\tau}$ 为Γ在切点 M_0 处切线T的切向量。（注：切向量 $\vec{\tau}$ 的方向恒指向参数t增加的方向，即恒指向质点运动的运动方向）。

由直线的点向式知：Γ上过切点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的切线T方程为：$\dfrac{x-x_0}{x'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{y'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{z'(t_0)}$，而过 M_0 且垂直于T的Γ的法平面Π为：$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$.

其中，$M(x,y,z)$ 是法平面Π中的动点坐标组成的点。(1)

(2) 设Γ为交面式：$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$，其中，$F,G\in C^1$ 且

$\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\neq 0$，此时确定隐函数组存在，由此方程组可

唯一确定函数组 $\begin{cases} x=x \\ y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases}$ 且 $y'(x)=-\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}\Big/\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}$，

$z'(x)=-\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}\Big/\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}$，令 $\vec{r}(x)=(x,y(x),z(x))$，则

$\vec{\tau}=\vec{r}'(x)=(1,y'(x),z'(x))\neq\theta$. 此时，Γ上点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线

T的方程为：$\dfrac{x-x_0}{1}=\dfrac{y-y_0}{y'(x_0)}=\dfrac{z-z_0}{z'(x_0)}$，而过切点 M_0 的法平面

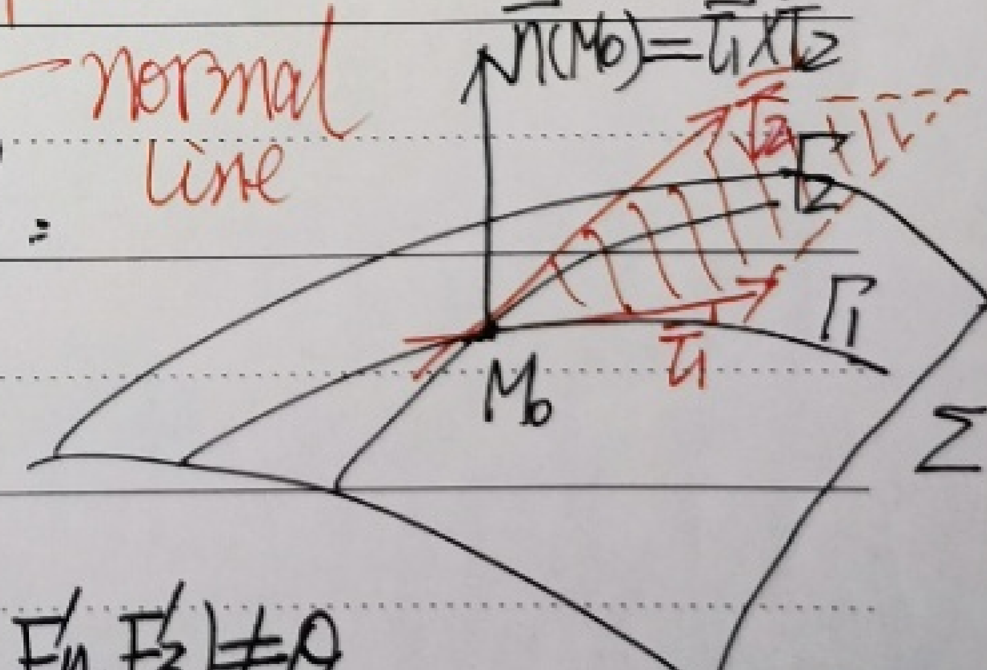
Π为：$1\cdot(x-x_0)+y'(x_0)(y-y_0)+z'(x_0)(z-z_0)=0$.

其中，$y'(x_0)=-\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}\Big|_{M_0}\Big/\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\Big|_{M_0}$，$z'(x_0)=-\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}\Big|_{M_0}\Big/\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\Big|_{M_0}$

tangent plane

normal line

三) 曲面Σ的切平面与法线N：



(1) 设曲面Σ为隐式曲面：

$F(x,y,z)=0$，而 $F\in C^1$ 且 $\nabla F=(F_x,F_y,F_z)\neq\theta$.

称这样的曲面Σ为光滑曲面. 由有限片光滑曲面连接而成的曲面为逐片光滑曲面. 如长方体表面，四面体表面.

设 $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma$，$\Gamma_1: \vec{r}_1(t)=(x_1(t),y_1(t),z_1(t))$，$\Gamma_2: \vec{r}_2(t)=(x_2(t),y_2(t),z_2(t))$ 是

Σ 中过点 M_0 的任意光滑曲线. 从而 $\begin{cases} F(x_1(t),y_1(t),z_1(t))=0 \\ F(x_2(t),y_2(t),z_2(t))=0 \end{cases}$

两边对 t 求导得：$\begin{cases} F'_x(M_0)x_1'(t_0)+F'_y(M_0)y_1'(t_0)+F'_z(M_0)z_1'(t_0)=0 \\ F'_x(M_0)x_2'(t_0)+F'_y(M_0)y_2'(t_0)+F'_z(M_0)z_2'(t_0)=0 \end{cases}$

令 $\vec{\tau}_1=(x_1'(t_0),y_1'(t_0),z_1'(t_0))$，$\vec{\tau}_2=(x_2'(t_0),y_2'(t_0),z_2'(t_0))$，$\vec{n}(M_0)=(F'_x(M_0),$

$F'_y(M_0),F'_z(M_0))=(F'_x,F'_y,F'_z)\big|_{M_0}=\nabla F\big|_{M_0}$，则 $\vec{n}(M_0)=\nabla F\big|_{M_0}\neq\theta$，

且 $\vec{n}(M_0)=\vec{\tau}_1\times\vec{\tau}_2$. 即向量 $\vec{n}(M_0)$ 是由 $\vec{\tau}_1,\vec{\tau}_2$ 所确定的平面 π

的法向量. 由 Γ_1,Γ_2 在 Σ 内的任意性知：Σ 内过点 M_0 的所有

曲线 Γ 在 M_0 处的切线都共面. 由过点 M_0 的所有切线

组成的平面 π 称之为曲面 Σ 在点 M_0 处的切平面.

由点法式知，π 的方程为：

$$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0)=0 \Longleftrightarrow \nabla F\big|_{M_0}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$$

$M(x,y,z)$ 是切平面 π 中的动点，$\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$.

过切点 M_0 垂直于切平面 π 的直线——法线 L 的方程：

$$\frac{x-x_0}{F_x'(M_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(M_0)}=\frac{z-z_0}{F_z'(M_0)} \text{ 或 } \nabla F\big|_{M_0}\times\overrightarrow{M_0M}=\theta$$

(2). 当曲面Σ为显式曲面：$z=f(x,y)\in C^1(D)$ 时.

设 $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma$，且 $z_0=f(x_0,y_0)=f(P_0)$，$P_0(x_0,y_0)$. 此时.

$F(x,y,z)=f(x,y)-z$，$\vec{n}(M_0)=(F_x',F_y',F_z')\big|_{M_0}=(f_x'(P_0),f_y'(P_0),-1)\neq\theta$.

过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面π：$f_x'(P_0)(x-x_0)+f_y'(P_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$

即 $f_x'(P_0)(x-x_0)+f_y'(P_0)(y-y_0)$ 恰好是 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点的

全微分 $dz\big|_{P_0}$，由切平面π：$z-z_0=\Delta z=dz\big|_{P_0}$

设 $P(x,y)$ 是 $P_0(x_0,y_0)$ 邻近的一点，$P(x,y)\in D$. 则曲面：$z=f(x,y)$

的 $\Delta z=f(P)-f(P_0)=f_x'(P_0)(x-x_0)+f_y'(P_0)(y-y_0)+o(\rho)$，$\rho=|P_0P|$

当ρ较小时，有曲面 $\Delta z\approx f_x'(P_0)(x-x_0)+f_y'(P_0)(y-y_0)=dz\big|_{P_0}$ = 切平面

π的 Δz. 即在点 M_0 的局部范围内，曲面Σ可用点 M_0 的

切平面π来替代. 即"局部可线性化"：

$\Delta z\approx f_x'(P_0)(x-x_0)+f_y'(P_0)(y-y_0)$. ($\rho>0$ 比较小时成立)

(3) 设Σ的向径式：$\vec{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\in C^1(D_{uv})$

且 $\vec{r}_u=\vec{r}'_u(u,v)=(x'_u,y'_u,z'_u)\neq 0$，$\vec{r}_v=\vec{r}'_v(u,v)=(x'_v,y'_v,z'_v)\neq 0$.

则过点$M_0(x_0,y_0,z_0)$的切平面Σ的法向量 $\vec{n}(M_0)=\vec{r}_u\times\vec{r}_v\Big|_{M_0}$

$$=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}_{M_0}=\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\Big|_{M_0}$$

Σ的方程：$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\Big|_{M_0}\cdot(x-x_0)+\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\Big|_{M_0}(y-y_0)+\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\Big|_{M_0}(z-z_0)=0$

或用向量式表示为：$(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)\Big|_{M_0}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$，$M(x,y,z)$是Σ中的动点.

过点M_0且垂直Σ的法线N：$(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)\Big|_{M_0}\times\overrightarrow{M_0M}=0$.

(三) 例题：

(1). 证明：一切二次曲面Σ：$Ax^2+By^2+Cz^2+Dx+Ey+Fz+G=0$ 上

点$M_0(x_0,y_0,z_0)$处的切平面Σ的方程为：

$Axx_0+Byy_0+Czz_0+D\frac{x+x_0}{2}+E\frac{y+y_0}{2}+F\frac{z+z_0}{2}+G=0$ (练$_1$)

(2). 二次曲线Γ：$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ 上点$M_0(x_0,y_0)$处的切线

T 为：$Axx_0+Byy_0+C\frac{x+x_0}{2}+D\frac{y+y_0}{2}+E=0$. (练$_2$)

(四) 作业：P.X9.4/3；4；8(1,4)；9；11；16(1)；17(2).

专题(一)：向量函数与矩阵函数取极限法则：

(1). 设 $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ 为向量函数，$\beta=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ 为常向量. 当 $t\to t_0$ 时.

$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ 是指：$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \xrightarrow{t\to t_0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x(t)-a \\ y(t)-b \\ z(t)-c \end{pmatrix} \xrightarrow{t\to t_0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Longleftrightarrow \left\| \begin{pmatrix} x(t)-a \\ y(t)-b \\ z(t)-c \end{pmatrix} \right\| \xrightarrow{t\to t_0} 0 \Longleftrightarrow \left((x(t)-a)^2+(y(t)-b)^2+(z(t)-c)^2\right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{t\to t_0} 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{t\to t_0} x(t)=a \\ \lim\limits_{t\to t_0} y(t)=b \\ \lim\limits_{t\to t_0} z(t)=c \end{cases}, \text{ 即 } \lim_{t\to t_0}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim\limits_{t\to t_0} x(t) \\ \lim\limits_{t\to t_0} y(t) \\ \lim\limits_{t\to t_0} z(t) \end{pmatrix}, \quad (※1)$$

(※1) 表明：向量函数取极限，就是把极限取到向量里面的每个元素去。即向量的极限等于极限的向量。

对于二维向量函数，或更高维的向量函数也有同样的结论。

(2). 设 $A(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) & y_1(t) \\ x_2(t) & y_2(t) \end{pmatrix}$ 为矩阵函数，$B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 为常数构成的矩阵. 当 $t\to t_0$ 时，$A(t)\longrightarrow B$ 是指：

$$A(t)-B \xrightarrow{t\to t_0} 0=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x_1(t)-a, & y_1(t)-b\\ x_2(t)-c, & y_2(t)-d\end{pmatrix} \xrightarrow{t\to t_0} \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\left\|\begin{pmatrix}x_1(t)-a & y_1(t)-b\\ x_2(t)-c & y_2(t)-d\end{pmatrix}\right\| = \left((x_1(t)-a)^2+(y_1(t)-b)^2+(x_2(t)-c)^2+(y_2(t)-d)^2\right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{t\to t_0} 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\lim\limits_{t\to t_0} x_1(t)=a\\ \lim\limits_{t\to t_0} y_1(t)=b\\ \lim\limits_{t\to t_0} x_2(t)=c\\ \lim\limits_{t\to t_0} y_2(t)=d\end{cases}, \text{即} \lim_{t\to t_0}\begin{pmatrix}x_1(t) & y_1(t)\\ x_2(t) & y_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lim\limits_{t\to t_0} x_1(t) & \lim\limits_{t\to t_0} y_1(t)\\ \lim\limits_{t\to t_0} x_2(t) & \lim\limits_{t\to t_0} y_2(t)\end{pmatrix} \quad (★2)$$

即有"矩阵的极限等于极限的矩阵"。

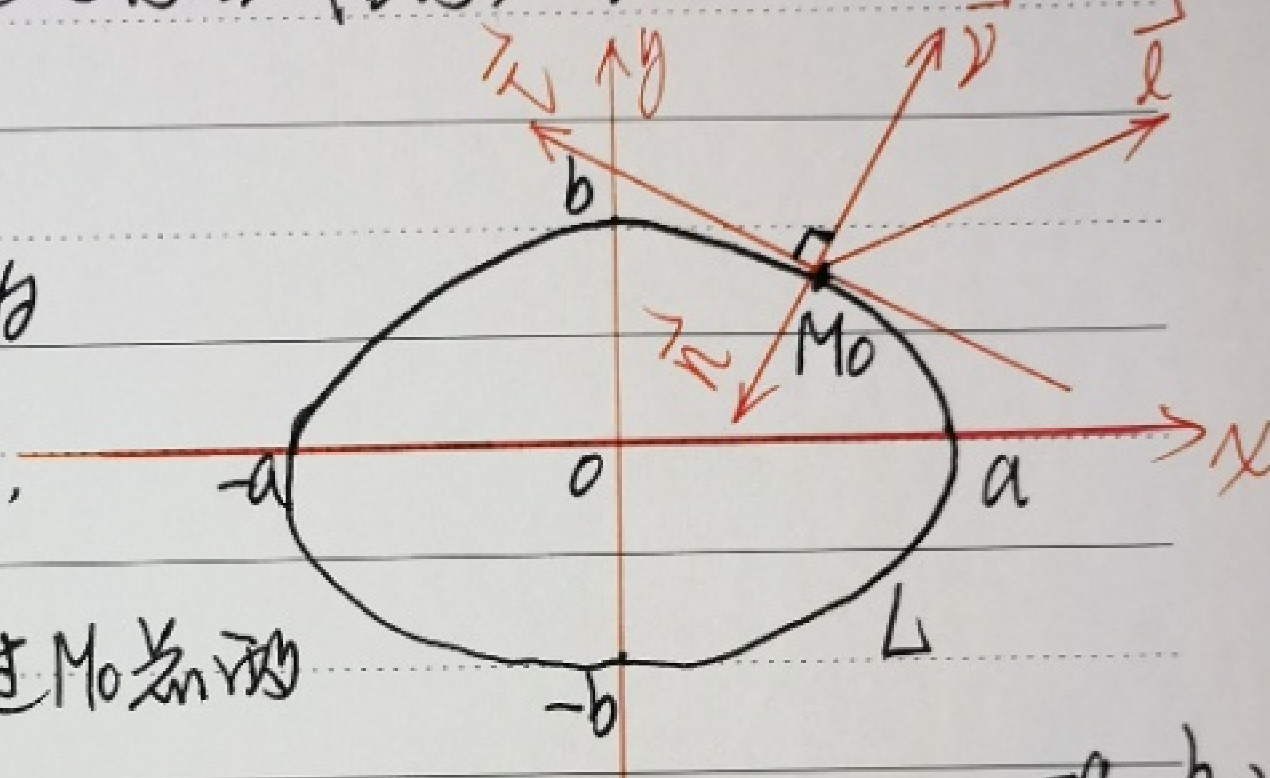
(★2)的结论可推广到其它的 $m\times n$ 的矩阵函数中去。

从(★1)，(★2)出发，可以得到"向量函数或矩阵函数求导数，就是把向量或矩阵的各元素求导数"，同理，向量或矩阵函数求积分，就是把向量或矩阵的各个元素求积分。一句话：矩阵函数的微积分，等于矩阵各个元素的微积分。

附录(三)：求方向导数及其最值.

设 $u=1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$，$(a>0,b>0$ 常数$)$. $M_0\left(\frac{a}{\sqrt2},\frac{b}{\sqrt2}\right)$ 是曲线 $L:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上的一点，求 $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{M_0}$，$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{M_0}\right)_{max}$，$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{M_0}\right)_{min}$

其中，$\vec{n}$ 是 L 上点 M_0 处的内法线方向，$\vec{l}$ 是 L 上点 M_0 处的任一方向。



解：设 L 的参数方程为

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases},\ t\in[0,2\pi].$$

则 M_0 对应 $t=\frac{\pi}{4}$ $\Longrightarrow$ 过 M_0 点的

L 的切向量 $\vec{\tau}=(x'(t),y'(t))\big|_{t=\frac{\pi}{4}}=(-a\sin t,b\cos t)\big|_{t=\frac{\pi}{4}}=\left(\frac{-a}{\sqrt2},\frac{b}{\sqrt2}\right).$

从而过点 M_0 的 L 的外法向 $\vec{\nu}=\left(\frac{b}{\sqrt2},\frac{a}{\sqrt2}\right)$，$\Longrightarrow$ 过点 M_0 的 L 的

内法向 $\vec{n}=-\vec{\nu}=\left(-\frac{b}{\sqrt2},\frac{-a}{\sqrt2}\right)$，取 $\vec{n}=(-b,-a)$ 则 $\vec{n}^{\circ}=\left(\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$

且 $u'_x(M_0)=-2x/a^2\big|_{M_0}=\frac{-2}{a^2}\cdot\frac{a}{\sqrt2}=-\frac{\sqrt2}{a}$；$u'_y(M_0)=-2y/b^2\big|_{M_0}=-\frac{\sqrt2}{b}$

故 $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{M_0}=(u'_x(M_0),u'_y(M_0))\cdot\vec{n}^{\circ}=\left(-\frac{\sqrt2}{a},-\frac{\sqrt2}{b}\right)\cdot\left(\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=\frac{\sqrt2}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)$；

且 $\left(\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{M_0}\right)_{max}=\left|(u'_x(M_0),u'_y(M_0))\right|=\left|\left(-\frac{\sqrt2}{a},-\frac{\sqrt2}{b}\right)\right|=\sqrt{\frac{2}{a^2}+\frac{2}{b^2}}=\frac{\sqrt2}{ab}\sqrt{a^2+b^2}$；

$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{M_0}\right)_{min}=-\left|(u'_x(M_0),u'_y(M_0))\right|=-\frac{\sqrt2}{ab}\sqrt{a^2+b^2}.$