

第13讲: 多元函数的Taylor公式及其应用

(一) 设 $D \subset \mathbb{R}^2$, 且 D 是凸区域, 即 D 中任意两点, 都可用 D 中直线连接起来。

$f = f(x, y) \in C^{(n)}(D)$, $M_0(x_0, y_0)$,

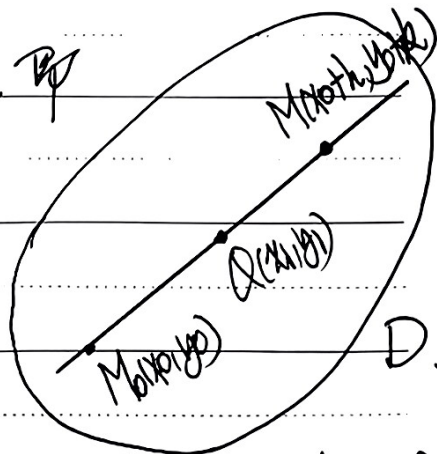
$M(x_1, y_1) = M(x_0+h, y_0+k) \in D$, $Q(x, y)$ 是直线上 M_0 与 M 之间一点且

Q 位于 M_0 与 M 之间. 由 $M_0Q \parallel M_0M$, 即

$$(x_1 - x_0, y_1 - y_0) \parallel (h, k) \Leftrightarrow$$

$$\frac{x_1 - x_0}{h} = \frac{y_1 - y_0}{k} \triangleq t \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + ht \\ y_1 = y_0 + kt \end{cases}, \quad t \in [0, 1].$$



$t=0$ 时, $Q=M_0$, $t=1$ 时, $Q=M$.

$f(Q) = f(x, y) = f(x_0+ht, y_0+kt) \triangleq g(t) \in C^{(n)}[0, 1]$, 利用 $g(t)$ 在

$$t=0 \text{ 处的 } n \text{ 阶 Taylor 公式: } g(t) = \sum_{m=0}^n \frac{g^{(m)}(0)}{m!} t^m + \frac{g^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} t^{n+1}, \quad (\text{A})$$

$t \in [0, 1], \theta \in (0, 1)$. 取 $t=1$, 即 $f(x_0+h, y_0+k) = f(x_1, y_1) = g(1)$

$$= \sum_{m=0}^n \frac{g^{(m)}(0)}{m!} + \frac{g^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} \quad (\text{B})$$

而 $g(0) = f(M_0)$, $g'(0) = (f'_x(x_0+ht, y_0+kt)h + f'_y(x_0+ht, y_0+kt)k)|_{t=0}$

$$= (h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y})|_{M_0} \triangleq (h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}) f(M_0) \quad (\text{C})$$



$$g''(0) = \left(\frac{\partial^2 f(x_0+ht, y_0+kt)}{\partial x^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_0+ht, y_0+kt)}{\partial x \partial y} hk + \frac{\partial^2 f(x_0+ht, y_0+kt)}{\partial y^2} k^2 \right) \Big|_{t=0}$$

$$= (h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}) f(x_0, y_0) = (h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})^2 f(M_0), \dots$$

$$g^{(m)}(0) = (h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})^m f(M_0), \quad m=0, 1, 2, \dots, n. \quad \text{代入 (2):}$$

$$f(x, y) \stackrel{\text{定义}}{=} f(x_0+ht, y_0+kt) = g(t) = \sum_{m=0}^n \frac{(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})^m f(M_0)}{m!} + R_n \quad (3)$$

$$R_n = \frac{(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})^{n+1} f(x_0+th, y_0+tk)}{(n+1)!}, \quad \text{其中 } \begin{cases} h=x-x_0 \\ k=y-y_0 \end{cases}$$

(3) 即为二元函数 $f(x, y)$ 在点 $M_0(x_0, y_0)$ 处的 n 阶 Taylor 公式。

例 1. 二元函数 $f = f(x, y)$ 在点 $M_0(x_0, y_0)$ 处的 0 阶 Taylor 公式:

$$f(x, y) \stackrel{n=0}{=} f(x_0, y_0) + f'_y(x_0+th, y_0+tk)k + f'_x(x_0+th, y_0+tk)h$$

$$\stackrel{\substack{h=x-x_0 \\ k=y-y_0}}{=} f(x_0, y_0) + f'_x(x_0+\theta(x-x_0), y_0+\theta(y-y_0))(x-x_0) +$$

$$f'_y(x_0+\theta(x-x_0), y_0+\theta(y-y_0))(y-y_0) \iff$$

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = (x-x_0) f'_x(x_0+\theta(x-x_0), y_0+\theta(y-y_0)) + (y-y_0) f'_y(x_0+\theta(x-x_0), y_0+\theta(y-y_0)) \quad (4)$$

(4) 又称为二元函数 $f = f(x, y)$ 的积分中值定理。7, 8, 9, 10, 11 题

例 2. 设 $f = f(x, y) \in C^3(D)$. 且 $f(x, y)$ 在点 $M_0(x_0, y_0)$ 处的 1 阶 Taylor 公式:

(2)



● $f(x,y) = f(x_0, y_0) + (x-x_0)f'_x(M_0) + (y-y_0)f'_y(M_0) + \frac{1}{2!} [f''_{xx}(M_0)(x-x_0)^2 + 2f''_{xy}(M_0)(x-x_0)(y-y_0) + f''_{yy}(M_0)(y-y_0)^2] + o(\rho^2)$. $\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = \sqrt{h^2 + k^2}$.

设 $f'_x(M_0) = 0 = f'_y(M_0)$, $f''_{xx}(M_0) = A$, $f''_{xy}(M_0) = f''_{yx}(M_0) = B$,

$f''_{yy}(M_0) = C$, 则有

● $f(x,y) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2} (A(x-x_0)^2 + 2B(x-x_0)(y-y_0) + C(y-y_0)^2) + o(\rho^2)$
 $= \frac{A}{2} [(x-x_0) + \frac{B}{A}(y-y_0)]^2 + \frac{AC-B^2}{2A} (y-y_0)^2 + o(\rho^2)$ (A)

(1°) 当 $\begin{cases} A > 0 \\ AC - B^2 > 0 \end{cases}$ 时, $f(x,y) - f(x_0, y_0) > 0$ 恒成立 $\Rightarrow f(M_0)$ 为极小值.

(2°) 当 $\begin{cases} A < 0 \\ AC - B^2 > 0 \end{cases}$ 时, $f(x,y) - f(x_0, y_0) < 0$ 恒成立 $\Rightarrow f(M_0)$ 为极大值.

● (3°) 当 $AC - B^2 < 0$ 时, $f(M_0)$ 不是 f 的极值.

Th1: 设 $f = f(x,y) \in C^2(D)$, D 是凸区域, $M_0(x_0, y_0) \in D$ 且 M_0

是 f 的驻点 $\nabla f|_{M_0} = f'_x(M_0) = 0 = f'_y(M_0)$. 令 $H_f(M_0) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$

称之为 f 在点 M_0 处的海森 (Hessian) 矩阵. 则

● (1°) 若 $H_f(M_0) > 0$ (正定), 即一切顺序主子式皆大于零时, $f(M_0)$ 为极小值,
 即 $\begin{cases} A > 0 \\ AC - B^2 > 0 \end{cases}$ 时, $f(M_0)$ 为 f 的极小值. (3)



(a) 若 $Hf(M_0) < 0$ (负定) 时, 即 $\begin{cases} A < 0 \\ AC - B^2 > 0 \end{cases}$ 时, $f(M_0)$ 为 f 的极大值.

(b) 若 $\Delta = AC - B^2 < 0$ 时, $f(M_0)$ 肯定不是 f 的极值. (课本中 f 的极大值看, 同学的思考可先思考一下)

(c) 若 $\Delta = AC - B^2 = 0$ 时, $f(M_0)$ 是否为极值, 需用更复杂的

Taylor 公式进行判定. (例如, $f(x, y) = x^4 + y^4$ 中, $f(0, 0) = 0$,

$$f'_x(0, 0) = 4x^3|_{x=0} = 0, f''_{xx}(0, 0) = 12x^2|_{x=0} = 0 = A, f''_{yy}(0, 0) = 0 = B, f''_{yy}(0, 0) = 12y^2|_{y=0} = 0 = C.$$

$\Delta = AC - B^2 = 0 \cdot 0 - 0^2 = 0$. 而 $f(0, 0) = 0$ 是

$f(x, y) = x^4 + y^4$ 的极值, 也是极值; 又如 $f(x, y) = x^3 + y^3$ 中,

$$f(0, 0) = 0, A = f''_{xx}(0, 0) = 0 = f''_{yy}(0, 0) = f''_{yy}(0, 0), \text{ 即 } A = B = C = 0 \Rightarrow$$

$\Delta = AC - B^2 = 0$, 且 $f(0, 0) = 0$ 不是 $f(x, y) = x^3 + y^3$ 的极值.)

(三) 例题:

例 1. 将 $f(x, y) = \frac{1}{1+x+y+xy}$ 在 $(0, 0, 0)$ 处泰勒展开到一阶.

= 一阶, 二阶, ... n 阶 Taylor 公式. (四)



例2, 求 $f(x,y) = x^3y^3 + 2x^2 + 3y^2 - 9x$ 在 $(0,0)$ 处的极值。

解例1: (1°) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的 Taylor 公式:

$$f(x,y) = f(0,0) + (x-0)f'_x(0+0(x-0), 0+0(y-0)) + (y-0)f'_y(0+0(x-0), 0+0(y-0)) \\ = 0 + xf'_x(0x, 0y) + yf'_y(0x, 0y), \quad 0 \in (0,1)$$

$$\text{即 } f(x,y) = \frac{1}{(1+x)(1+y)}, \quad f'_x(0x, 0y) = \frac{1}{(1+0x)^2} \frac{1}{1+y}, \quad f'_y(0x, 0y) = \frac{1}{(1+y)^2} \frac{1}{1+0x}$$

$$\therefore f(x,y) = \frac{1}{(1+x)(1+y)} = 0 + \frac{x}{(1+0x)^2} \frac{1}{1+y} + \frac{y}{(1+0y)^2} \frac{1}{1+0x} \text{ Taylor 公式}$$

$$\text{(2°) 利用 } \frac{1}{1+x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3), \quad \frac{1}{1+y} = 1 + y + y^2 + o(y^3) \\ = 1 + x + o(x^2) \qquad \qquad \qquad = 1 + y + y^2 + o(y^2) \\ = 1 + x + o(x) \qquad \qquad \qquad = 1 + y + o(y)$$

可得 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的 Taylor 公式为:

$$f(x,y) = (1+x+o(x))(1+y+o(y)) = 1+x+y+R_1 = 1+(x+y)+R_1 = 1 + \frac{x^2+y^2}{x-y} + R_1$$

$$f(x,y) = (1+x+x^2+o(x^3))(1+y+y^2+o(y^3)) = 1+x+y+x^2+xy+y^2+R_2 \\ = 1+(x+y) + \frac{x^3-y^3}{x-y} + R_2$$

$$f(x,y) = (1+x+x^2+o(x^3))(1+y+y^2+o(y^3))$$

$$= 1+x+y+(x^2+y^2+xy) + (x^3+y^3+xy^2+yx^2) + R_3$$

$$= 1+(x+y) + \frac{x^3-y^3}{x-y} + \frac{x^2-y^2}{x-y} + R_3. \quad (5)$$



(1) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的 n 阶 Taylor 公式为:

$$f(x,y) = 1 + \frac{x^2+y^2}{x-y} + \frac{x^3+y^3}{x-y} + \dots + \frac{x^{n+1}+y^{n+1}}{x-y} + R_n \quad (n \geq 1)$$

求解法:

(1) 先求 $f(x,y)$ 的所有驻点: $\begin{cases} f'_x(x,y) = 2x+y-9=0 \\ f'_y(x,y) = x^2+y=0 \end{cases}$

$\Rightarrow x = -3$ 或 $x = 1$; $y = 0$ 或 2 . 组合成四组驻点: $M_1(1,0)$,

$M_2(1,2)$, $M_3(-3,0)$, $M_4(-3,2)$.

(2) 对每个驻点, 计算海森矩阵的元素 A, B, C .

判断海森矩阵 $Hf(M_i)$ 的正定情况.

在 $M_1(1,0)$ 处, 由 $f''_{xx} = 6x+b$, $f''_{yy} = 0$, $f''_{xy} = -b+y$ 知 $\begin{cases} A=12 > 0 \\ B=0 \\ C=6 \end{cases}$

$\Delta = AC - B^2 = 72 > 0$. 即 $Hf(M_1) > 0$ (正定), $\therefore f(M_1) = f(1,0)$

$= -5$ 是 f 的一个极值; 在 $M_2(1,2)$ 处, $\begin{cases} A=12 > 0 \\ B=0 \\ C=-6 \end{cases}$

$\Delta = AC - B^2 = -72 < 0$, $f(1,2)$ 不是极值.

在 $M_3(-3,0)$ 处, $A = -12 < 0$, $B = 0$, $C = 6 \Rightarrow \begin{cases} A < 0 \\ \Delta = AC - B^2 < 0 \end{cases}$.

$\therefore f(-3,0)$ 不是极值.

(b)



在 $M_3(\mathbb{R})$ 中, $A = -12 < 0, B = 0, C = -6, \begin{cases} A < 0 \\ \Delta = AC - B^2 = 72 > 0 \end{cases}$

$f(x)$ 是, $\therefore f(-3, 2) = 31$ 是 f 的一个极大值。

(三) 对称矩阵 A 的正定性与负定性:

设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 且 $a_{12} = a_{21}, a_{13} = a_{31}, a_{23} = a_{32}$, 则称

A 是对称矩阵, 此时, $A^T = A$.

(1) 若 A 的所有顺序主子式均大于零, 即 $|a_{11}| = a_{11} > 0$,

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = |A| > 0$, 则称 A 是正定矩阵。

(2) 若 A 的奇数阶顺序主子式均小于零, 偶数阶顺序主子式均大于零, 即 $|a_{11}| = a_{11} < 0, |A| < 0$,

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$, 则称 A 是负定矩阵。

更一般的对称矩阵的正定性与负定性同

上述三阶矩阵情况. 在线性代数中详细讨论。

作业: $8 \times 9, 5 = 7(2); 3; 4(1), (3), (7); 7(1), (3), (4).$

(7).

