数学分析 (B2) 第十七讲

于俊骜

2024 年 4 月 3 日

祝大家多拿 4.3↑

目录

1 重点回顾

1.1 为什么需要拓扑 *

开集 相较于单变量，第九章并没有直接定义连续函数以及导数，而是先定义了不少拓扑概念。实际上，单变量中也是需要这些拓扑性质的，但直线上的集合比较简单，可以直接用区间的性质说明。

在定义多变量连续函数时，我们同样需要使用 $\varepsilon-\delta$ 语言。但是，在 $\varepsilon-\delta$ 语言的描述中，有一条“$|x-x_0|<\delta$ 时”，这就要求 $|x-x_0|<\delta$ 的点都有意义。也就是说，我们在定义函数在一点 x_0 处的连续性时，要求以 x_0 为中心、半径为 δ 的球包含在函数的定义域中。因此，我们选择**在开集上定义连续函数**，是因为它保证任何一点，它附近的点也在定义域里。

偏导数与方向导数是用差商的极限定义的，因此也需要在开集上定义。进一步，微分意味着一点处线性逼近，除了在这一点处取值相同以外，还希望这一点附近的值差别不大，所以也要在开集上定义。

闭集 积分则是另一种形式的极限，在分割求和取极限的过程中，我们需要在分割得到的每个小集合上取一个代表元。我们肯定不希望代表元在取极限的过程中跑出这个小集合，所以希望这个集合**对于极限封闭**，这恰好符合闭集的定义。进一步，无穷远处的积分是不好研究的，所以积分还应该在一个“不太大”的集合上定义，也就是**有界闭集**，或者在 $\mathbb{R}^n$ 中称为**紧集**。

连通性 另外，大家还学到了**连通与道路连通**，这两条性质用处不那么大。因为我们研究的不连通的集合，只需要研究其每一个连通子集。只需要知道，道路连通能推出连通，反过来不成立（习题 9.1.6）。这些性质在本课程中的唯一作用判断边界。因为后面学到的 Green 公式、Gauss 公式、Stokes 公式都是**把内部的积分转化为边界的积分**。连通性较好的集合边界较简单，尤其是**单连通区域**，其边界只有一圈。

1.2 正则性的关系和反例

“正则性”一词通常指的是函数微分性质有多好，比如连续性、可微性、C^1、光滑。上次课我们复习了各种正则性的推导关系，即

定理 1 (正则性推导关系). 对于 $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$

$$f\text{的所有偏导数在 } \mathbf{x}_0 \text{ 连续} \Longrightarrow f\text{在 } \mathbf{x}_0 \text{ 可微} \Longrightarrow \begin{cases} f\text{在 } \mathbf{x}_0 \text{ 连续} \\ f\text{在 } \mathbf{x}_0 \text{ 的所有偏导数存在} \\ f\text{在 } \mathbf{x}_0 \text{ 的所有方向导数存在} \end{cases}$$

因此相较于可微，我们更喜欢各偏导数连续，即多元函数的 C^k 条件。多一个“连续”，不仅保证了可微，也保证了许多换序性质（如偏导可交换）。

偏导数的存在性和连续性是比较好验证的，而一旦遇到验证微分的题目，给出的函数多半不满足偏导数连续。因此我们往往只能用等价定义去验证，即

定理 2 (可微的等价判定). $f(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x}_0$ 可微当且仅当

$$f(\mathbf{x}_0) - \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x}_0) h_i = o(|\mathbf{h}|)$$

另一方面，证明不能反推的反例也需要熟悉，考试有可能会要求构造。由于偏导数、方向导数都与“直线”息息相关，所以我们一个很直接的想法是构造曲线，如抛物线。我们构造在原点处

- 可微，但偏导数不连续的函数

$$f_1(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- 连续且各偏导数、各方向导数存在，但不可微的函数

$$f_2(x,y) = \begin{cases} x, & y = x^2 \\ 0, & y \neq x^2 \end{cases}$$

- 各偏导数、各方向导数存在，但不可微也不连续的函数

$$f_3(x,y) = \begin{cases} 1, & y = x^2, x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

- 各偏导数存在，但其他方向导数不存在的函数

$$f_4(x,y) = \begin{cases} 0, & xy = 0 \\ 1, & xy \neq 0 \end{cases}$$

- 各方向存在，但各偏导数不存在的函数

$$f_5(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

这五个反例可以应对所有的题目，大家可以根据图像记忆。

以上反例也说明**只有可微时**方向导数才能写成偏导数的线性组合，或者梯度点乘单位方向向量

1.3 隐函数的微分

根据隐函数定理，对于足够光滑的函数 $F(\mathbf{x},y)$，只要某点处 y 不“直上直下”，方程 $F=0$ 就可以确定一个隐函数 $y=f(\mathbf{x})$。它的想法类似于单变量时“局部单调就有局部反函数”。

隐函数定理可以用来判断隐函数是否存在，但用它来计算微分并不是最明智的。实际计算中，经常会犯漏符号、分子分母颠倒等错误。一个更好的方法是直接微分，然后用微分与偏导数的关系计算（实际变成了**解线性方程组**），逆映射也类似。该方法尤其适用于变量太多，看不出来互相的约束关系的情形。比如下面的题目：

例 1 (习题 9.3.16)**.** 函数 $u=u(x,y)$ 由方程组 $f(x,y,z,y)=0,g(y,z,t)=0,h(z,t)=0$，求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$。

证明. 两边微分，得到

$$\left.\begin{aligned}u&=f(x,y,z,t)\\0&=g(y,z,t)\\0&=h(z,t)\end{aligned}\right\}\Longrightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f_x\,\mathrm{d}x+f_y\,\mathrm{d}y+f_z\,\mathrm{d}z+f_t\,\mathrm{d}t\\0=g_y\,\mathrm{d}y+g_z\,\mathrm{d}z+g_t\,\mathrm{d}t\\0=h_z\,\mathrm{d}z+h_t\,\mathrm{d}t\end{cases}$$

联立消去 $\mathrm{d}z,\mathrm{d}t$，解得

$$\mathrm{d}u=f_x\,\mathrm{d}x+\left(f_y+\frac{g_y(f_th_z-f_zh_t)}{g_zh_t-g_th_z}\right)\mathrm{d}y$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_x\qquad\frac{\partial u}{\partial y}=f_y+\frac{g_y(f_th_z-f_zh_t)}{g_zh_t-g_th_z}$$

□

这种方法有时可以结合矩阵，写起来更清晰，也简化计算，具体题目我们会在下一部分碰到。

1.4 曲线与曲面论初步

为了能将分析的工具引入几何对象，我们必须要将曲线和曲面写成方程的形式。曲线是一维的、曲面是二维的，所以我们用分别用 1 个、2 个变量对它们进行参数化，一般写作 $\mathbf{r}(t)$ 或 $\mathbf{r}(u,v)$。

我们在第八章学到的二次曲面，一般可以用三角、双曲三角进行参数化。而对于后续碰到的更一般的曲面，我们经常采用柱坐标、球坐标等方式，将其化为**易于积分**的形式。

对于曲线，几个比较重要的概念需要加以区分：

- 简单曲线：不自交的曲线（即单射）；
- 正则曲线：足够光滑（起码 C^2）且满足 $|\mathbf{r}'(t)| > 0$ 恒成立的曲线；
- 光滑曲线：若 $\mathbf{r}(t) \in C^\infty$，则称曲线是光滑的。

书上给出的几个曲线曲率的公式，考前现背就行。

本节一般不会单独出题，多半是结合后面的曲线曲面积分。最多是求个切线或切平面，直接求（偏）导得到切（法）向量计算就行。

1.5 极值与条件极值

多元函数的 Taylor 展开比一元函数复杂得多，不再是每阶导只有一项。事实上，大于等于二阶的导数并没有太多用处。同样地，一阶导代表单调性，二阶导代表凹凸性。不过多元函数不再有增减区间，我们一般用它们研究极值。

计算 n 阶 Taylor 展开时，我们多半要用到一些观察，比如可分离变量的函数，可以先展开、后相乘。其正确性由 Taylor 展开的唯一性保证。

计算极值和最值的套路比较固定，即**变分法**：

1. 对 f 求一阶导数，令 $\nabla f = 0$，解得可疑极值点；
2. 在这些点处计算 Hessian 阵 Hf，通过正定、负定和不定判断是否为极值点，并判断类型；
3. 若边界也在定义域内，还要求出边界的最大最小值，将所有边界的最值和内部的最值比较，得到整个函数的最值。

对于条件极值问题，把条件写成 $f=0$ 的模式，并乘上参数 λ，加到原函数上。这样相当于加了个 0，无任何影响，但对参数求导，可以多一个条件，从而解得可疑极值点。

此时，Hessian 阵不一定能判断条件极值点的类型（绝大多数情况可以）。如果判断不了，还没法直接看出来，最后的退路是把条件代回原函数消元（形式上消不了的话就当成隐函数），然后对变量更少的函数算 Hessian 阵。

1.6 三维空间中的微分形式 *

我们在把单变量微分推广到多变量，一个比较大的困难是定义差商的极限时，没办法让向量做分母。但是从另一个角度看，极限式

$$\lim_{h\to 0}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{(x+h)-(x-h)}$$

分母可视为区间 $(x-h,x+h)$ 的大小，这也就是半径为 h 的一维的球的大小。

在一些不够光滑但有可以建立**测度结构**的空间，我们可以定义 Lebesgue 积分，进一步能够**用积分定义微分**：

定理 3 (Lebesgue 微分定理)**.** *设 f 是可积函数，则*

$$\frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} f(y)\,dy=f(x),\ a.e.$$

另一方面，在一些非常光滑但可能比较“扭曲”的空间（如流形）中，直接分割求和取极限不现实，我们反过来**用微分定义积分**，这就是**微分形式的起源**。通俗地来讲，微分形式就是凑成一个合适的形式 $\mathrm{d}\omega$，使得可以直接实用 Stokes 公式

$$\int_\Omega \mathrm{d}\omega=\int_{\partial\Omega}\omega$$

改写成更低次的微分形式来计算。这也是后面要学到的 Green 公式、Gauss 公式、狭义 Stokes 公式的本质，因为梯度场、旋度场、散度场可以看作三维欧氏空间里的一个 1、2、3-形式。微分形式的一个特点是再求一次外微分为 0，这也解释了为什么梯度场无旋、旋度场无源。（场就是函数，叫法不同而已）。

三度的计算记好定义硬带就行。特别地，旋度可以用行列式记忆。另外，学物理的同学建议对**习题 9.6** 中 ∇ 的公式倒背如流，物理上多半不展开直接算。

2 习题选讲

2.1 二重极限的计算

习题 9.1.14(10) 判断二重极限

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$$

是否存在并说明理由。

证明. 不存在。

事实上，$y=0$ 时原式恒为 0。而取 $y=-x+x^2$，则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=-x+x^2}} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^3-x^2+1}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-x+1}+1} = -\frac{1}{2} \neq 0$$

故极限不存在。 □

注 1. 本题很容易错用均值不等式得出极限存在的错误结论。二次函数是证明重极限不存在的有效方法。

2.2 复合偏导数

习题 9.2.34 设 u 满足方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$，且 $u(x,2x)=x, u_1(x,2x)=x^2$，求 $u_{11}(x,2x), u_{12}(x,2x), u_{22}(x,2x)$。

证明. 在 $u(x,2x)=x$ 两边对 x 求导，得到

$$u_1(x,2x)+2u_2(x,2x)=1 \Longrightarrow u_2(x,2x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2$$

进一步

$$u_1(x,2x)=x^2 \Longrightarrow u_{11}(x,2x)+2u_{12}(x,2x)=2x$$
$$u_2(x,2x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2 \Longrightarrow u_{12}(x,2x)+2u_{22}(x,2x)=-x$$

再根据 $u_{11}(x,2x)=u_{22}(x,2x)$，解得

$$u_{11}(x,2x)=u_{22}(x,2x)=-\frac{4}{3}x \qquad u_{12}(x,2x)=\frac{5}{3}x$$

□

注 2. 课本上的写法生动形象地表明求导不规范、助教两行泪。这题的关键在于弄清分量和变量，值得细品。

2.3 矩阵计算微分

习题 9.3.11(2) $u=u(x,y), v=v(x,y)$ 是由

$$\begin{cases} xu-yv=0 \\ yu+xv=1 \end{cases}$$

确定的隐函数组，计算 $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$。

证明. 由题

$$\left.\begin{matrix} xu-yv=0 \\ yu+xv=1 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} x\,\mathrm{d}u-y\,\mathrm{d}v+u\,\mathrm{d}x-v\,\mathrm{d}y=0 \\ y\,\mathrm{d}u+x\,\mathrm{d}v+u\,\mathrm{d}x+v\,\mathrm{d}y=0 \end{cases}$$

即

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{d}u \\ \mathrm{d}v \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix}=0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} \mathrm{d}u \\ \mathrm{d}v \end{pmatrix}=\frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} xu-yv & yu+xv \\ -yu-xv & xu-yv \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix}$$

于是

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} xu-yv & yu+xv \\ -yu-xv & xu-yv \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=1$$

□

注 3. 用伴随阵求矩阵的逆应该熟练掌握。

2.4 构造微分方程

第 9 章综合习题 5 $f(x,y)\in C^2(\mathbb{R}^2)$ 满足 $f(x,y)=f(y,x)$，且

$$f(x,y)+f(y,z)+f(z,x)=3f\left(\frac{x+y+z}{3},\frac{x+y+z}{3}\right)$$

计算 $f(x,y)$。

证明. 在 $f(x,y)=f(y,x)$ 两边对 x 求导，得到 $f_1(x,y)=f_2(y,x)$。

类似地有

$$f_1(x,y)+f_2(z,x)=f_1\left(\frac{x+y+z}{3},\frac{x+y+z}{3}\right)+f_2\left(\frac{x+y+z}{3},\frac{x+y+z}{3}\right)$$

整理得

$$f_1(x,y)+f_1(x,z)=2f_1\left(\frac{x+y+z}{3},\frac{x+y+z}{3}\right)$$

再分别对 x,y 求导得到

$$\begin{aligned}f_{12}(x,y)&=\frac{2}{3}f_{11}\left(\frac{x+y+z}{3},\frac{x+y+z}{3}\right)+\frac{2}{3}f_{12}\left(\frac{x+y+z}{3},\frac{x+y+z}{3}\right)\\&=f_{11}(x,y)+f_{11}(x,z)\end{aligned}$$

这说明 f_{11} 与第二分量无关，从而可设

$$f_{11}(x,y)=F(x)\Longrightarrow f_1(x,y)=G(x)+\varphi(y)\Longrightarrow f(x,y)=H(x)+x\varphi(y)+\psi(y)$$

注意到取 $z=y$ 就有

$$f_{12}(x,y)=2f_{11}(x,y)=2F(x)$$

即 f_{12} 与第二分量无关。由对称性，可类似得到 f_{12} 与第一分量无关，因此 f_{12} 是常数，从而 f 是至多 2 次的多项式。

结合对称性，设其为

$$f(x,y)=a(x^2+y^2)+bxy+c(x+y)+d$$

代入

$$f(x,y)+f(y,z)+f(z,x)=3f\left(\frac{x+y+z}{3},\frac{x+y+z}{3}\right)$$

得到

$$\begin{aligned}&2a(x^2+y^2+z^2)+b(xy+yz+zx)+2c(x+y+z)+3d\\=&\frac{2}{3}a(x+y+z)^2+\frac{1}{3}b(x+y+z)^2+2c(x+y+z)+3d\\\Longrightarrow&2a(x^2+y^2+z^2)+b(xy+yz+zx)\\=&\frac{2a+b}{3}(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)\end{aligned}$$

比较系数知

$$2a=\frac{2a+b}{3}\qquad b=\frac{4a+2b}{3}$$

解得 $b=4a$。最终

$$f(x,y)=f(x,y)=a(x^2+4xy+y^2)+c(x+y)+d$$

□

注 4. 很多微分方程正是用这种思路产生的：无法直接得到定量关系，但可以求导得到一个方程，再去研究这个方程。

2.5 多元条件极值

第 9 章综合习题 15 设 x_i 是正数，$1 \leq i \leq n$ 且 $x_1 + \cdots + x_n = n$。用 Lagrange 乘数法证明

$$x_1 \cdots x_n \left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} \right)$$

证明. 考虑函数

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} - n \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} + \lambda \left(\sum_{k=1}^{n} x_k - n \right)$$

则

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = -\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{n}{x_1} \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} + \lambda = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = -\dfrac{1}{x_2^2} + \dfrac{n}{x_2} \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} + \lambda = 0 \\ \qquad \cdots\cdots \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = -\dfrac{1}{x_n^2} + \dfrac{n}{x_n} \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} + \lambda = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = n \end{cases}$$

根据对称性解得 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$，即 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$。

进一步，对于 $i \neq j$

$$f_{ij}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = -\frac{n}{x_i x_j} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}$$

且不难发现

$$f_{ii}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{2}{x_i^3} - \frac{2n}{x_i^2} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}$$

因此 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$ 时

$$H = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2n & -n & \cdots & -n \\ -n & 2-2n & \cdots & -n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -n & -n & \cdots & 2-2n \end{pmatrix} = 2I_n - n \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix}$$

记 $\alpha_r = (1, 1, \cdots, 1)^T \in \mathbb{R}^{r\times 1}$，$A_r$ 为 r 阶全 1 矩阵，则 $r > 2$ 时该 Hessian 阵的第 r 个顺序主子式为

$$\begin{aligned} \det\left((2-n)I_r - nA_r\right) &= \det\left((2-n)I_r - n\alpha^T\alpha\right) = (2-n)^r \det\left(I_r - \frac{n}{2-n}\alpha^T\alpha\right) \\ &= (2-n)^r \det\left(1 - \frac{n}{2-n}\alpha\alpha^T\right) = (2-n)^r\left(1 + \frac{nr}{n-2}\right) \end{aligned}$$

另一方面，$2 - 2n < 0$ 且 $(2-2n)^2 - n^2 = (2-3n)(2+n) > 0$，只要 $n > 2$。此时 $H < 0$。因此 $(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (1, 1, \cdots, 1)$ 是极大值点，进而

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \le f(1, 1, \cdots, 1) = 0 \Longrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right) \prod_{k=1}^{n} x_k \le n$$

而 $n = 1, 2$ 时，结论可以直接验证。 □

注 5. *如果不移项直接计算，得到的会是一个半负定阵，无法判定。*

3 拓展知识

3.1 曲线的弧长参数

曲线的参数化有很清楚的物理意义：我骑车沿着曲线，从 $t = 0$ 走，一个时间点 t 对应一个位置，得到一般参数化 $\mathbf{r}(t)$。但骑的速度很可能不规律，对它求导得到的速度向量长短不一。

后来，我助教工资发了，我买了个里程表安在车轮上。这样我骑车经过的路程——也就是走过的曲线的弧长 s 也能唯一对应一个位置，这样就可以得到**弧长参数化** $\mathbf{r}(s)$。

当 s 的变化量很小时，曲线近似为直线，故位置坐标的变化量和里程的变化量相同，因此切向量 $\dot{\mathbf{r}}(s)$ 的模长恒为 1。当然，这也可以严格证明：

$$\dot{\mathbf{r}}(s) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

习惯上，对于一般参数求导写撇，对于弧长参数求导写点（牛顿狂喜）。

弧长参数的另一个很有用的性质是计算曲率，即 $\kappa = |\ddot{r}(s)|$。感兴趣的同学可自行验证。

注 6. 曲线论的结论可以被弧长参数大大简化，包括后面挠率的计算、*Frenet* 标架、曲线论基本定理。所以能用弧长参数就用弧长参数。另一方面，可以证明，只要切向量模长恒为 1，那么这个参数一定是弧长参数。

3.2 调和函数的极值原理

我们已知，Hessian 阵正定可以推出函数 f 取极小值；反过来，f 取极小值时，Hessian 阵一定半正定。这是因为任取一个模长充分小的向量 $\mathbf{h}$，它在 Hessian 阵对应的二次型中值一定非负，否则函数在该点处的一个小邻域内，而一次项又不起作用，函数会“向下弯”，它就可能是极小值点了。特别地，我们将这个 $\mathbf{h}$ 分别取为 $\mathbf{e_i}$（各坐标轴的单位基向量），就可以知道此时 Hessian 阵的对角元恒非负，因此该点处必有 $\Delta f \geq 0$。对极大值点同理。

课上我们接触到了三类古典偏微分方程——位势方程、热方程、波方程，并验证了它们的一些解。但实际上解这些方程往往是困难的。物理上有一个常用的取巧的方法：“猜”出一个解，再丢给数学家证明唯一性。

事实上，对于 $\mathbb{R}^n$ 中的一个有界区域，给定区域的边值，这三类方程的解都是唯一的。其中位势方程和热方程可以用极值原理得到，而波方程需要用能量法证明。下面，我们以位势方程为例，展示 PDE 古典估计的常用办法。

电磁场满足位势方程 $\Delta u = f$，位势方程解的唯一性就是电磁场的唯一性。

定理 4. 若有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上的函数 u 满足 $\Delta u = 0$，那么它一定在边界达到最值。

证明. 不妨设 $\Omega \subset \{\mathbf{x} | -d < x_1 < d\}$。

考虑辅助函数

$$\varphi(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + \varepsilon e^{\alpha x_1}$$

其中 α 待定，则

$$\Delta\varphi = \Delta u + \varepsilon\alpha^2 e^{\alpha x_1} = \varepsilon\alpha^2 e^{\alpha x_1} > 0$$

假设 φ 的最大值在 $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ 达到，则

$$0 \geq \Delta\varphi(\mathbf{x}_0) > 0$$

矛盾！于是 φ 的最大值只能在边界达到。

于是

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\Omega} \varphi \leq \sup_{\partial\Omega} (u + \varepsilon e^{\alpha x_1}) \leq \sup_{\partial\Omega} u + \varepsilon \sup e^{\alpha x_1} < \sup_{\partial\Omega} u + \varepsilon \sup e^{\alpha d}$$

由 ε 的任意性，令 $\varepsilon \to 0^+$，即得

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u$$

另一方面，取

$$\psi(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) - \varepsilon e^{\alpha x_1}$$

可知最小值也在边界达到。 □

注 7. 直接证明是得不到矛盾的，所以需要构造辅助函数，俗称“造轮子”。

有了极值原理，我们可以秒证位势方程解的唯一性

定理 5 (Dirichlet 问题解的唯一性)**.** 位势方程的 *Dirichlet* 边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \mathbf{x} \in \Omega \\ u = \varphi, & \mathbf{x} \in \partial\Omega \end{cases}$$

至多有一个解。这里 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界区域。

证明. 假设有两个解 u_1, u_2，则它们的差 $u = u_1 - u_2$ 满足方程

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \mathbf{x} \in \Omega \\ u = 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega \end{cases}$$

由极值原理，u 的最值只能在 $\partial\Omega$ 取到，即最大值和最小值均为 0，所以 $u_1 = u_2$。 □

注 8. 类似该定理的证明，我们可以得到静电屏蔽的理论依据。