第6讲：多元函数的极限与连续性

(一) 多元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ $(n\geq 2)$ 的例子：

(1). $z=ax+by+c$, $(x,y)\in R^2=\{(x,y)\mid x^2+y^2<+\infty\}$：平面方程；

(2). $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, $(x,y)\in D: x^2+y^2\leq R^2$ $(R>0)$；上半球面；

(3). $f(x,y)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$, $(x,y)\in R^2$：二维正态分布概率密度函数；

(4). $u=\ln(a^2-x^2-y^2-z^2)$, $x^2+y^2+z^2<a^2$, $\Omega: x^2+y^2+z^2<a^2$ 为开球体；

(5). $B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$, $(x>0, y>0)$：β（贝塔）函数.

注：(2)、(3) 都是光滑曲面。

(6). $u=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$：$n$ 元线性函数.

(7). $Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2+2(a_{12}x_1x_2+a_{13}x_1x_3+\cdots+a_{1n}x_1x_n+$
$a_{23}x_2x_3+x_2x_4a_{24}+\cdots+a_{2n}x_2x_n+a_{34}x_3x_4+\cdots+a_{3n}x_3x_n+\cdots+a_{n\,n-1}x_nx_{n-1})$
$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$, $(a_{ij}=a_{ji})$, $x_1,x_2,\cdots x_n$ 的二次齐次函数。

多元函数中，最简单的是二元函数：$z=f(x,y)$, $(x,y)\in D$.

且 $z=f(x,y)$ 有直观图像——空间的曲面. 因此，二元函数

是本课的重点讨论的多元函数。

(二)、平面点集的若干概念：

二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域 D 是平面 R^2 的一个子集.

(1) 点 M_0 的 δ 邻域：$U(M_0,\delta)\triangleq\{M \mid |MM_0|=\rho(M,M_0)<\delta\}$

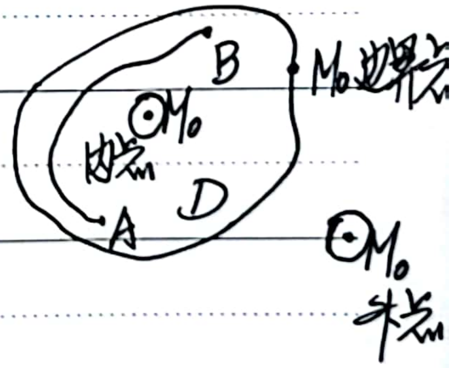
即 $U(M_0,\delta)=\{(x,y) \mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\}$. $M_0(x_0,y_0)$, $M(x,y)$.

(2). D 的内点 M_0：$M_0\in D$，且 $\exists\delta>0$，使 $U(M_0,\delta)\subset D$.

(3)、D 的外点 M_0：$M_0\notin D$，且 $\exists\delta>0$，使 $U(M_0,\delta)\cap D=\phi$.

(4) D 的边界点 M_0：M_0 的任意 δ 邻域中都同时含有 D 中点与 D^C 中点

点集 D 的边界点的全体记作 ∂D：D 的边界.



(5). 全由内点组成的点集称为开集；开集 D 的余集 D^C 称为闭集. 闭集的余集是开集.

(6) 连通性：若 D 中任两点 A，B，都可用 D 中连续曲线连接，则称 D 是连通的.

(2).

(7). 开集若是连通的，称之为开区域，简称区域；开区域 D 与 D 的边界 ∂D 之并，称之为闭区域，记作 $\bar{D}=D+\partial D$.

(8). 若 $\exists R>0$，使 $D\subset U(O,R)$，则称 D 是有界集，$O=O(0,0)$.

例1：$U(M_0,\delta)$、R^2，$x^2+y^2+z^2<a^2$ 都是开集，且第1、第3个是有界集，R^2 是无界集；而 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\geq\delta^2$，$(R^2)^C=\Phi$，$x^2+y^2+z^2\geq a^2$ 都是闭集，$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leq\delta^2$，$x^2+y^2+z^2\leq a^2$ 是有界闭集(区域).

例2：空集 Φ 由整了内点组成，因此是开集，而 $(\Phi)^C=R^2$，因此 R^2 又是闭集，由 R^2 是开集，且 $(R^2)^C=\Phi$ 知 Φ 又是闭集，在所有点集中，既开又闭的仅有 Φ 与 R^n，$(\forall n\in N)$ 共两个.

(三). 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处的极限与连续性.

(1). 若对 $\forall\delta>0$，$\mathring{U}(M_0,\delta)$ 都有点集 D 中点，则称 M_0 是 D 的聚点(极限点)，M_0 的聚点可以属于 D，也可不属于 D.

(2). 设点 $M_0\in D$，且 $\exists\delta>0$，使 $U(M_0,\delta)$ 中除 M_0 无 D 中点，则称 M_0 是 D 的孤立点。

(3).

定义1：设 $f(x,y)$ 定义在点集 D 上，$M_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点。a 是个常数。若对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，当 $M\in D$，$0<|MM_0|<\delta$ 时，$|f(M)-a|<\varepsilon$ 恒成立，则称 a 是 M 趋于 M_0 时，$f(x,y)$ 的极限。

记作：$\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=a$ 或 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=a$，或 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=a$。

由于多元函数的极限与一元函数的极限定义的方式相同，因此，一元函数极限中的四则运算法则，夹逼准则，及极限的唯一性，局部有界性，保号性，保序性等都可推广到多元函数的极限中来。

定义2：设 $f(x,y)$ 在点集 D 上有定义，$M_0(x_0,y_0)\in D$。若对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，当 $M\in D$，$|MM_0|<\delta$ 时，$|f(M)-f(M_0)|<\varepsilon$ 恒成立，则称 $f(x,y)$ 在点 M_0 处连续 (C)。若 f 在 D 中每一点都 C，则称 f 在 D 中连续。若 δ 仅与 ε 有关，称 f 在 D 上一致连续。

从定义2可知，若 M_0 是 D 的聚点，则必有：

$\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=f(M_0)=f(\lim\limits_{M\to M_0} M)$，即极限号与函数符号可交换！

若$M_0(x_0,y_0)$是D的孤立点，则$f(M)$在M_0处必连续，证明如下：对$\forall\varepsilon>0$，$\because M_0$是D的孤立点，$\therefore\exists\delta>0$，使$U(M_0,\delta)$中除$M_0$外无D中点，当$M\in D$，$|MM_0|<\delta$时，$|f(M)-f(M_0)|=|f(M_0)-f(M_0)|=0<\varepsilon$恒成立，依定义，$f(M)$在孤立点$M_0$处连续。

注意：课本的定义9.8与第一册的定义2.3，都只针对聚点进行了连续性的定义，而未考虑函数在孤立点处的连续性，因此，函数的连续性定义，科学而合理的做法是用$\varepsilon-\delta$语言定义，而不应用：$\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=f(M_0)$这种极限值等于函数值的方法定义。

例3. $f(x,y)=\sqrt{\cos^2\pi x+\cos^2\pi y-2}$的定义域由所有的整点（格点）$M(m,n)$，$m,n\in Z$组成，每个整点都是D的孤立点，也都是$f(x,y)$的连续点，从而$f(x,y)$在D上连续。

例4. 考察下列极限：（格点（Lattice point），即整点）

(1) 证明：$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y^2}{x^4+y^2}=0$；(2) 证明：$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$ 不存在.

(3) 证明：$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$ 不存在.

证(1)：$\because x^4+y^2\geq 2x^2|y|$ $\therefore \frac{x^2|y|}{x^4+y^2}\leq\frac{1}{2}\Rightarrow$

$0\leq\frac{x^2y^2}{x^4+y^2}\leq\frac{1}{2}|y|$ 且 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}0=0=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{1}{2}|y|$，由夹逼准则，

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y^2}{x^4+y^2}=0$.

证(2)：取 $y=kx^2$，k 为常数，即动点 $M(x,y)$ 沿抛物线 $y=kx^2$

趋于 $O(0,0)$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=kx^2}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{kx^4}{x^4+k^2x^4}=\frac{k}{1+k^2}$

当 k 取不同的值时，即动点从不同方式趋于 $O(0,0)$ 时，

函数有不同的极限，与极限存在的唯一性矛盾！

故 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$ 不存在. 从而 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

在 $O(0,0)$ 处不连续。

证(3)：$\because \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left((1+xy)^{\frac{1}{xy}}\right)^{\frac{xy}{x+y}}$

且 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(1+xy)^{\frac{1}{xy}} \xlongequal{xy=u} \lim\limits_{u\to0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$,

而 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{x+y} \xlongequal{取y=-x+kx^2} \lim\limits_{x\to0}\frac{-x^2+kx^3}{kx^2}=-\frac{1}{k}$, $(k\neq0)$

即 k 取不同的值时，$M(x,y)$ 沿 $y=-x+kx^2$ 趋于 $O(0,0)$ 时，

函数有不同的极限，与极限存在的唯一性矛盾！

$\therefore \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{x+y}$ 不存在 $\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$ 不存在。

再论 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2>0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $O(0,0)$ 处的连续性。

可以证明：在 $O(0,0)$ 处沿着过此点的每一条射线 $\begin{cases}x=t\cos\alpha\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$

$(0\le t<+\infty)$，$f(x,y)$ 都连续，即 $\lim\limits_{t\to0^+}f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=f(0,0)=0=$ ~~…~~

但 $f(x,y)$ 在 $O(0,0)$ 处并不连续。

证：(1°) $\because \lim\limits_{t\to0^+}f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{(t\cos\alpha)^2(t\sin\alpha)}{(t\cos\alpha)^4+(t\sin\alpha)^2}=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{t\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^2\cos^4\alpha+\sin^2\alpha}$

注：$\alpha=0$ 时，$y=0$，$x\to0$ 且 $x\neq0$，$t=x\to0$，$t\neq0$；$\frac{t\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^2\cos^4\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{0}{t^2+0}=0$.

$=0=f(0,0)$，$\therefore f(x,y)$ 沿着过 $O(0,0)$ 的射线都 C；

(2°) 已在上面证明了 $f(x,y)$ 在 $O(0,0)$ 处的极限值：

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$ 不存在，且 $O(0,0)$ 是聚点，$\therefore f(x,y)$

在 $O(0,0)$ 处不连续！

(四)、连续多元函数的主要性质：

(1)、连续多元函数的和、差、积、商(分母不为零)仍是连续的多元函数；

(2)、在复合有意义的前提下，连续多元函数的复合函数仍是连续函数；

(3) "有界闭区域 D 上的连续多元函数具有良好性质"：

(1) 有界性；(2) 最值性；(3) 介值性；(4) 零值性；(5) 一致连续性。

上述性质的证明方法，与一元连续函数的良好性质证明方法相类似。

(五)、作业：EX9.1

12；13；14(2)，(7)，(9)，(10)；15；17(1)；18.

附页:

(1). $u = GPA = \dfrac{x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2 + \cdots + x_i\lambda_i + \cdots + x_n\lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_i + \cdots + \lambda_n}$. (式1)

其中, x_i, λ_i 分别是第 i 门课程的学分绩点与学分, $i=1,2,\cdots,n$.

因此, GPA是以课程的学分为权重(Wighted), 学分绩点 x_i

的加权算术平均值. 其中, $\lambda_1>0, \lambda_2>0, \cdots, \lambda_n>0$. 若令

$\omega_i = \lambda_i / \sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$, $i=1,2,\cdots,n$, 则 $\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n = \dfrac{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n} = 1$.

且 $\omega_1>0, \omega_2>0, \cdots, \omega_n$. 称权重 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ 为归一化权重.

此时, $u = GPA = x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + \cdots + \omega_i x_i + \cdots + x_n\omega_n$ (式2)

即GPA是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 n 元线性函数, 同构是超平面。

(2). $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}$, $x_i \in R$ (式3)

是一个 n 维正态分布的概率密度函数. 满足 n 重反常积分:

$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}}_{n\text{个}} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,dx_1dx_2\cdots dx_n \equiv 1$, $\forall n \in N^*$ (式4)