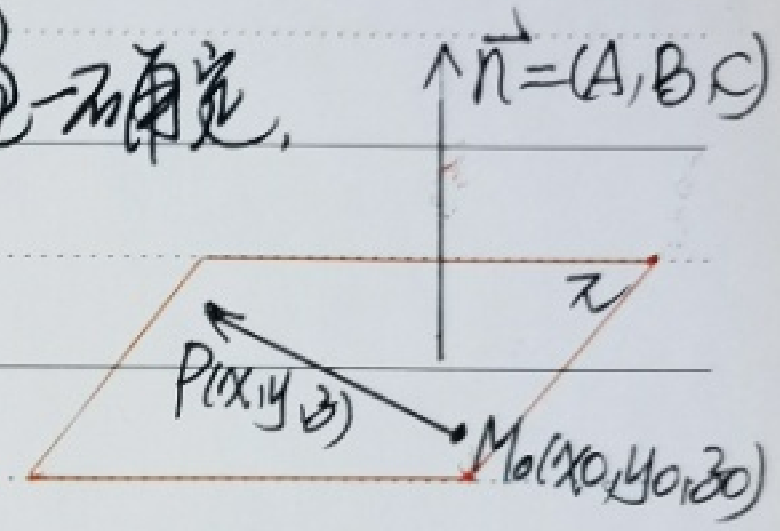
第二讲：空间的平面与直线

(一) 平面(plane)的五种表示形式：

(1). 向量式：设平面π过已知点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 且与已知的非零向量 $\vec{n}=(A,B,C)$ 垂直，则π唯一确定。



设 $P(x,y,z)$ 为π中任意一点，则 $\overrightarrow{M_0P}\perp\vec{n}$

于是，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0P}=0$ (1)

即是平面π的向量式方程。

(2). 点法式：垂直于平面π的非零向量 $\vec{n}$，称之为π的法向量，当π有法向量 $\vec{n}$ 且过已知点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 时，由(1)有 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0P}=0$ 而 $\overrightarrow{M_0P}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$，即有点法式方程：

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad (2).$$

(3). 一般式：设 $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$，则从(2)有一般式：

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (3)$$

法向量：normal vector

(4) 截距式：在(3)中，设 $-D \triangleq d \neq 0$，令 $\begin{cases} d/A = a \\ d/B = b \\ d/C = c \end{cases}$

则有截距式：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. (4).

a, b, c 称之为π在 ox, oy, oz 轴上的截距.

(5). 三点式：设 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ 是不共线的三点，则由A, B, C三点所确定的平面π为：

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0, \quad (5).$$

其中 $P(x, y, z)$ 是π的动点坐标. 由 $\vec{AP}, \vec{AB}, \vec{AC}$ 共面可知，

$(\vec{AP}\times\vec{AB})\cdot\vec{AC}=0$ 且 $\begin{cases} \vec{AP}=(x-x_1, y-y_1, z-z_1) \\ \vec{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1) \\ \vec{AC}=(x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1) \end{cases}$,

由向量混合积的行列式表示，即得(5).

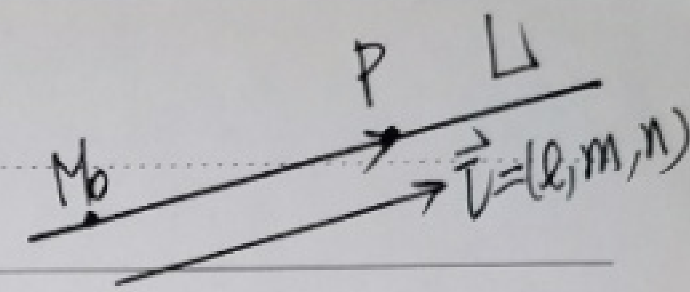
(三) 空间直线(line)的五种表示形式：

(1). 向量式：设 $\vec{\tau}=(l, m, n)\neq\theta$ 为已知向量，直线 $L \parallel \vec{\tau}$，且 L 过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，则有 L 的向量式方程：

$$\vec{\tau}\times\vec{M_0P}=\theta \quad (1)$$

其中，$P(x, y, z)$ 是 L 上的动点坐标。

由 $\overrightarrow{M_0P} \parallel \vec{s} \Leftrightarrow \vec{s}\times\overrightarrow{M_0P}=0$



即知(1)式的正确性.

(2). 点向式：平行于直线L的任意非零向量，都称为L的方向向量. 设$P(x,y,z)$为L上任一点，$M_0(x_0,y_0,z_0)$为L上的已知点.

则 $\overrightarrow{M_0P}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$，由(1) $\vec{s}\times\overrightarrow{M_0P}=0 \Leftrightarrow \vec{s}\parallel\overrightarrow{M_0P} \Leftrightarrow$

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \quad (2).\ (\text{点向式})$$

(3). 参数式：在(2)中，令比值为t，则得L的参数式：

$$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt \end{cases},\ t\in R. \quad (3).$$

(4). 交面式：设平面π_1：$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 与平面π_2：$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 不平行，则π_1与π_2的交线L为空间直线：

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \quad (4).$$

(5). 两点式：设$Q_1(x_1,y_1,z_1)$，$Q_2(x_2,y_2,z_2)$为不同的两点.

则Q_1,Q_2所确定的空间直线L为：

方向向量：direction Vector

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad (5).$$

其中，$P(x,y,z)$ 为 L 上的动点坐标。

从 $\overrightarrow{Q_1P} \parallel \overrightarrow{Q_1Q_2} \Leftrightarrow (5)$ 成立。

(三)、面面、线线、线面间的关系。

设 $\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$，$\vec{n_1}=(A_1,B_1,C_1)\neq 0$，

$\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，$\vec{n_2}=(A_2,B_2,C_2)\neq 0$，

$L_1: \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$，$\vec{s_1}=(l_1,m_1,n_1)\neq 0$，

$L_2: \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$，$\vec{s_2}=(l_2,m_2,n_2)\neq 0$.

则

(1). $\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n_1}\parallel\vec{n_2} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2} \Leftrightarrow \vec{n_1}\times\vec{n_2}=0$

(2) $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n_1}\perp\vec{n_2} \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0 \Leftrightarrow \vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=0$.

(3) π_1 与 π_2 的夹角 α $(0\le\alpha\le\pi)$，$\cos\alpha=\frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}=\vec{n_1}^{\circ}\cdot\vec{n_2}^{\circ}\Rightarrow\alpha$

(4). $L_1\parallel L_2 \Leftrightarrow \vec{s_1}\parallel\vec{s_2} \Leftrightarrow \vec{s_1}\times\vec{s_2}=0 \Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$

(5). $L_1\perp L_2 \Leftrightarrow \vec{s_1}\perp\vec{s_2} \Leftrightarrow \vec{s_1}\cdot\vec{s_2}=0 \Leftrightarrow l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$.

(6). L_1 与 L_2 的夹角 α $(0\le\alpha\le\pi)$，$\cos\alpha=\frac{\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}}{|\vec{s_1}||\vec{s_2}|}=\vec{s_1}^{\circ}\cdot\vec{s_2}^{\circ}\Rightarrow\alpha$

(7). $L_1\perp\pi_1 \Leftrightarrow \vec{s_1}\parallel\vec{n_1} \Leftrightarrow \vec{s_1}\times\vec{n_1}=0 \Leftrightarrow \frac{A_1}{l_1}=\frac{B_1}{m_1}=\frac{C_1}{n_1}$

(8). $L_1\parallel\pi_1 \Leftrightarrow \vec{s_1}\perp\vec{n_1} \Leftrightarrow \vec{s_1}\cdot\vec{n_1}=0 \Leftrightarrow A_1l_1+B_1m_1+C_1n_1=0$

(9). L_1与π_1的夹角β ($0\le\beta\le\frac{\pi}{2}$): $\cos(\frac{\pi}{2}-\beta)=\left|\frac{\vec{n_1}\cdot\vec{s_1}}{|\vec{n_1}||\vec{s_1}|}\right|=|\vec{n_1^\circ}\cdot\vec{s_1^\circ}|$

即 $\sin\beta=|\vec{n_1^\circ}\cdot\vec{s_1^\circ}| \Rightarrow \beta=\arcsin(|\vec{n_1^\circ}\cdot\vec{s_1^\circ}|)$

(四)例题:

例1. 分别求已知点$M(1,-1,-2)$关于点$A(1,0,1)$,平面π: $3x+4y-5z-1=0$及直线L: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{0}$的对称点$Q$.

解(1). 设$Q(x,y,z)$为$M(1,-1,-2)$关于$A(1,0,1)$的对称点,

则$A(1,0,1)$是线段MQ的中点,依中点坐标表示法,有

$$\begin{cases}\frac{x+1}{2}=1\\ \frac{y-1}{2}=0\\ \frac{z-2}{2}=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=1\\ y=1\\ z=4.\end{cases}$$ 即$Q(1,1,4)$为所求的对称点。

解(2). 设$Q(x,y,z)$为$M(1,-1,-2)$关于π的对称点,$\vec{n}=(3,4,-5)$.

则 $\vec{MQ}\parallel\vec{n} \Leftrightarrow \frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z+2}{-5} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1+3t\\ y=-1+4t\\ z=-2-5t\end{cases}$ (*1)

而MQ的中点$N(\frac{x+1}{2},\frac{y-1}{2},\frac{z-2}{2})$在平面$\pi$: $3x+4y-5z-1=0$上.

$\therefore 3(\frac{x+1}{2})+4(\frac{y-1}{2})-5(\frac{z-2}{2})-1=0$ (*2)

将(*1)代入(*2)可得$t=12/25$,再代入(*1)可知,

$M(1,-1,-2)$ 之的对称点 Q 为 $Q(\frac{61}{25}, \frac{23}{25}, \frac{-10}{25})$.

解(3)：设 $Q(x,y,z)$ 为 $M(1,-1,-2)$ 关于 L：$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{0}$

的对称点，则线段 MQ 中点 $N(\frac{x+1}{2}, \frac{y-1}{2}, \frac{z-2}{2})$ 在

直线 L 上，从而有 $\frac{\frac{x+1}{2}-1}{-1}=\frac{\frac{y-1}{2}-1}{2}=\frac{\frac{z-2}{2}-1}{0} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=5 \\ z=4. \end{cases}$

另外：由 $\overrightarrow{MQ} \perp \vec{\tau}$，$\vec{\tau}=(-1,2,0) \Rightarrow \overrightarrow{MQ}\cdot\vec{\tau}=0$

$-1(x-1)+2(y+1)+0(z+2)=0 \Rightarrow -x+2y=-3$. 联立 $\begin{cases} 2x+y=5 \\ -x+2y=-3 \\ z=4 \end{cases}$

解出 $x=\frac{13}{5}$, $y=\frac{-1}{5}$, $z=4$. 即 $Q(\frac{13}{5}, \frac{-1}{5}, 4)$ 为所求对称点。

例2、设 $A(1,0,1)$, $B(0,1,1)$, $C(2,0,3)$, $D(1,1,1)$ 为已知

的四点. (1) 求四面体 Ω：$A-BCD$ 的体积 $V(\Omega)$；

(2) 求 B,C,D 三点所确定的三角形 $\triangle$ 面积 $S_\triangle$，

(3) 求 B,C,D 三点所确定的平面方程.

解(1)：$V(\Omega)$ 是以 $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BA}$ 为棱的平行六面体体积

的 $1/6$. 而 $\overrightarrow{BC}=(2,-1,2)$, $\overrightarrow{BD}=(1,0,0)$, $\overrightarrow{BA}=(1,-1,0)$.

$V(\Omega)=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD})\cdot\overrightarrow{BA}\right|=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}2&-1&2\\1&0&0\\1&-1&0\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\times2=\frac{1}{3}$;

解(2). 以B, C, D三点为顶点构成的△面积为$S_\Delta=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}\right|$

而$\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}=\begin{vmatrix}i&j&k\\2&-1&2\\1&0&0\end{vmatrix}=0i+2j+k=(0,2,1)\Rightarrow$

$\left|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}\right|=\sqrt{0^2+2^2+1^2}=\sqrt{5}$, 故$S_\Delta=\frac{1}{2}\sqrt{5}=\frac{\sqrt{5}}{2}$;

解(3). 设$P(x,y,z)$为所求平面π中的任一点, 则$\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}$共面$\Leftrightarrow(\overrightarrow{BP}\times\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{BD}=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x-0&y-1&z-1\\2&-1&2\\1&0&0\end{vmatrix}=0$ 即

$2y+z-3=0$为所求的平面方程。

(五)、作业: EX8.2

1; 2; 3; 6; 7; 14(1); 15(1); 16.

(六)、向量$\vec{\alpha}$与$\vec{\beta}$的线性运算: $\lambda_1\vec{\alpha}+\lambda_2\vec{\beta}$, $\lambda_1,\lambda_2\in R$; $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$的混合积: $(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}=(\vec{\beta}\times\vec{\gamma})\cdot\vec{\alpha}=(\vec{\gamma}\times\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}$; $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$的二重向量积$(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\times\vec{\gamma}+(\vec{\beta}\times\vec{\gamma})\times\vec{\alpha}+(\vec{\gamma}\times\vec{\alpha})\times\vec{\beta}=\theta=(0,0,0)$.