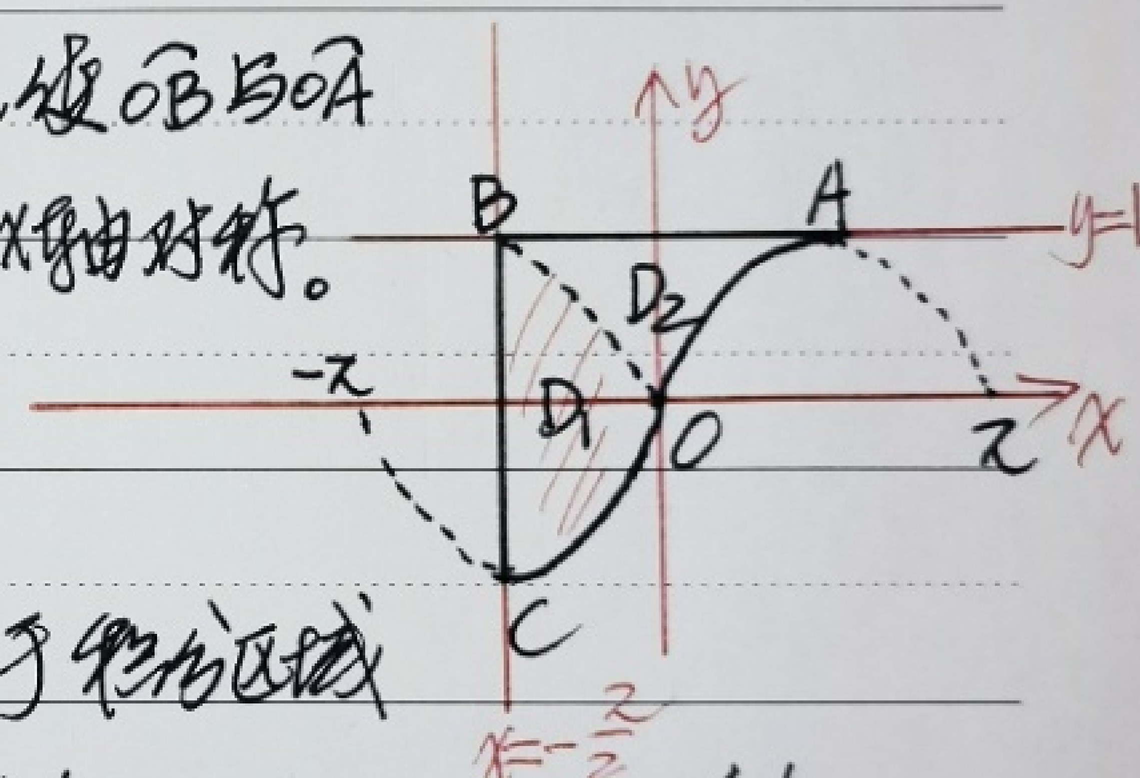
第20讲：二重积分的一般变量代换：$\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \end{cases}$.

(一) 复习：计算下列二重积分：

(1). $I=\iint\limits_D x(1+ye^{x^4y^6})dxdy$，D是由 $y=\sin x$，$x=-\frac{\pi}{2}$，$y=1$ 围成的区域.

(2). $I=\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$，D是 $x^2+y^2\le 1$ 在第一象限部分.



解(1)：如图，作辅助曲线OB，使OB与OA关于y轴对称，则OB与OC关于Ox轴对称。设曲边△BOA为D_2，曲边△BOC为D_1.

则 $D=D_1\cup D_2$，依二重积分关于积分区域的可加性，$I=\iint\limits_{D_1} x(1+ye^{x^4y^6})dxdy+\iint\limits_{D_2} x(1+ye^{x^4y^6})dxdy$

且 $f(x,y)=x(1+ye^{x^4y^6})$ 关于x是连续的奇函数且D_2关于$x=0$坐标轴对称，故 $\iint\limits_{D_2} x(1+ye^{x^4y^6})dxdy=0$.

又 $g(x,y)=xye^{x^4y^6}$ 关于y是连续的奇函数且D_1关于坐标轴$y=0$对称，故 $\iint\limits_{D_1} xye^{x^4y^6}dxdy=0$. 从而

$$I=\iint\limits_{D_1} x\,dxdy+\iint\limits_{D_1} xye^{x^4y^6}dxdy+0=\iint\limits_{D_1} x\,dxdy+0+0$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\Big(\int_{\sin x}^{-\sin x} x\,dy\Big)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} x(-2\sin x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} 2x\,d\cos x$$

$$=2x\cos x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}-2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos x\,dx=0-2\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}=2\sin(-\frac{\pi}{2})=-2.$$

解(2). 因 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$，且 D 是圆盘域的一部分. 此时宜作极坐标变换 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$，且 $\begin{cases} 0\le r\le 1 \\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2} \end{cases}$，故

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^1\sqrt{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}\,r\,dr\Big)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^2\,dr\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\,d\theta\times\int_0^1 r\,dr)$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{\pi}{6}.$$

(三). 二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 的一般变量代换 $\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v). \end{cases}$ $(u,v)\in D_{uv}$，通常要求 $x(u,v),y(u,v)\in C^1(D_{uv})$. 且 Jacobi 行列式 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$. 利用二元函数的全微分，得：

$$\begin{cases} dx=dx(u,v)=x'_u du+x'_v dv \\ dy=dy(u,v)=y'_u du+y'_v dv, \end{cases}$$ 从而.

$$dxdy=(x'_u du+x'_v dv)(y'_u du+y'_v dv)=0+x'_u y'_v dudv+x'_v y'_u dvdu+0$$

$$=x'_u y'_v dudv-x'_v y'_u dudv=(x'_u y'_v-x'_v y'_u)dudv=\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}dudv$$

$$=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv$$

故 $I=\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D_{uv}} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$ (※1).

(※1) 即为二重积分的一般变量代换公式。这里 D, D_{uv} 都累认为有界闭区域。

例1、若作广义极坐标变换：$\begin{cases} x=ar\cos\theta \\ y=br\sin\theta \end{cases}$，则有

$$dxdy=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|drd\theta=\left\|\begin{matrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{matrix}\right\|drd\theta=abrdrd\theta$$

(三). 例题：

(1). 计算：$I=\iint\limits_D \frac{x^2}{x^2+y^2}dxdy$，$D: x^2+y^2\le x$；

(2). 计算：$I=\iint\limits_D xydxdy$，D 是第一象限中 $xy=a$，$xy=b>a>0$，$y^2=cx$，$y^2=dx$ $(d>c>0)$ 四曲线围成的区域；

(3). 计算：$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)dxdy$

(4). 设 $f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}$

其中，$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 为常数，且 $\sigma_1>0$，$\sigma_2>0$；$\rho\in(-1,1)$，$\mu_1,\mu_2\in R$。

证明：$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$。

其中，$f(x,y)$ 称为二维正态分布的概率密度函数。 (3).

解(1). 令 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$，则 $dxdy=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|drd\theta=\left\|\begin{matrix}\cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta\end{matrix}\right\|drd\theta$

$=rdrd\theta$；且从 $x^2+y^2\le x \Rightarrow (r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2\le r\cos\theta \Rightarrow 0\le r\le\cos\theta$

且 $(x-\frac{1}{2})^2+y^2\le(\frac{1}{2})^2$ 知 $\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. 故

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}\frac{(r\cos\theta)^2}{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}rdr=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}r\cos^2\theta dr$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2\theta\cdot\frac{r^2}{2}\Big|_0^{\cos\theta})d\theta=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta=\frac{3}{16}\pi.$$

解(2): 令 $\begin{cases} xy=u \\ \frac{y^2}{x}=v \end{cases}$ 则 $\begin{cases} a\le u\le b \\ c\le v\le d \end{cases}$，且 $dxdy=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$

$$=\frac{dudv}{\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|}=\frac{dudv}{\left\|\begin{matrix}y & x \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x}\end{matrix}\right\|}=\frac{dudv}{3v}$$，故

$$I=\iint\limits_{\substack{a\le u\le b \\ c\le v\le d}}u\frac{dudv}{3v}=\frac{1}{3}(\int_a^b udu\times\int_c^d\frac{dv}{v})=\frac{b^2-a^2}{6}\ln\frac{d}{c}.$$

解(3): 令 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$，则 $dxdy=rdrd\theta$. 且 $\begin{cases} 0\le r<+\infty \\ 0\le\theta\le2\pi \end{cases}$.

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{+\infty}(e^{-r^2}\cos r^2)rdr=(\int_0^{2\pi}1d\theta)\times(\int_0^{+\infty}e^{-r^2}\cos r^2 rdr)$$

$$=2\pi(-\frac{1}{2})\int_0^{+\infty}\cos r^2de^{-r^2}=-\pi I_0,\ I_0=\int_0^{+\infty}\cos r^2de^{-r^2}.$$

对 I_0 用分部积分: $I_0=e^{-r^2}\cos r^2\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-r^2}\sin r^2(2r)dr$

$$=0-1-\int_0^{+\infty}\sin r^2de^{-r^2}$$

而 $\int_0^{+\infty}\sin r^2 \, d(e^{-r^2}) = e^{-r^2}\sin r^2\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-r^2}\cos r^2 (2r)dr$

$= 0 + \int_0^{+\infty}\cos r^2 \, de^{-r^2} = I_0$ 即有：$I_0 = -1 - I_0 \Rightarrow I_0 = -\frac{1}{2}$.

故 $I = -\pi I_0 = \frac{\pi}{2}$.

证明：对 $\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{(x-\mu_1)}{\sigma_1}\frac{(y-\mu_2)}{\sigma_2} + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2$ 进行配方得：

$$\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}-\rho\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2(1-\rho^2) = \left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}-\rho\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\sqrt{1-\rho^2}\right)^2$$

令 $\begin{cases} \frac{x-\mu_1}{\sigma_1}-\rho\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} = s \\ \frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\sqrt{1-\rho^2} = t \end{cases}$ 则 $dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\right| dsdt = \frac{dsdt}{\left|\frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)}\right|}$

$$= \frac{dsdt}{\begin{vmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & -\frac{\rho}{\sigma_2} \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2}\sqrt{1-\rho^2} \end{vmatrix}} = \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{1-\rho^2}} dsdt$$，故

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi \cancel{\sigma_1\sigma_2}\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(s^2+t^2)} \frac{\cancel{\sigma_1\sigma_2}}{\sqrt{1-\rho^2}} dsdt$$

$$= \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2(1-\rho^2)}}ds\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2(1-\rho^2)}}dt\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2(1-\rho^2)}}ds\right)^2 \quad \frac{\text{令 } \frac{s}{\sqrt{2}\sqrt{1-\rho^2}} = u}{\text{则 } ds = \sqrt{2}\sqrt{1-\rho^2}\,du}$$

$$= \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\sqrt{2}\sqrt{1-\rho^2}\,du\right)^2$$

$$= \frac{2(1-\rho^2)}{2\pi(1-\rho^2)}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du\right)^2 = \frac{1}{\pi}(\sqrt{\pi})^2 = 1.$$

(四). 关于 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\dfrac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$ 的证明：

证：当 $x=x(u,v)\in C^1$，$y=y(u,v)\in C^1$ 且 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$ 时，方程组

$\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases}$ 可唯一确定反函数组：$\begin{cases}u=u(x,y)\\ v=v(x,y)\end{cases}$.

先对方程组 $\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases}$ 两边关于 x 求偏导：得

$\begin{cases}1=x'_u\cdot u'_x+x'_v\cdot v'_x\\ 0=y'_u\cdot u'_x+y'_v\cdot v'_x\end{cases}$；再对方程组 $\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases}$ 两边关于 y 求

偏导得 $\begin{cases}0=x'_u\cdot u'_y+x'_v\cdot v'_y\\ 1=y'_u\cdot u'_y+y'_v\cdot v'_y\end{cases}$，于是

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\cdot\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\left|\begin{pmatrix}x'_u & x'_v\\ y'_u & y'_v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u'_x & u'_y\\ v'_x & v'_y\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}x'_uu'_x+x'_vv'_x, & x'_uu'_y+x'_vv'_y\\ y'_uu'_x+y'_vv'_x & y'_uu'_y+y'_vv'_y\end{pmatrix}\right|$$

$$=\left|\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right|=1\iff\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\dfrac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$$

可推广至 n 阶雅可比行列式。

(五) 作业：EX10.1：1/(4),(6)；2/(6),(8)；

EX10.2：2/(3),(4),(7),(9)；3/(3)；5.