第26讲：第一类曲面积分：$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS$.

（曲面积分：surface integral），dS是面积元(素).

设 $L: \vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))\in C^1[\alpha,\beta]$ 且 $\vec{r}'(t)=(x'(t),y'(t),z'(t))\neq\theta$，

$\forall t\in[\alpha,\beta]$，此时称 L 为正则曲线（regular curve），

$f(x,y,z)$ 定义在 L 上且连续，则

$$\int_L f(x,y,z)ds \triangleq \lim_{\lambda\to 0^+}\sum_{i=1}^{n} f(x(\tau_i),y(\tau_i),z(\tau_i))\Delta s_i$$

$$=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt \qquad (*_1)$$

(二) 第一型曲面积分：$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS$

设 Σ 为光滑曲面：$\vec{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\in C^1(D_{uv})$ 且

$\vec{n}=\vec{r}_u'\times\vec{r}_v'\neq\theta$，$\forall(u,v)\in D_{uv}$，称这样的曲面 Σ 为正则曲面（regular surface），$f(x,y,z)$ 是曲面薄片 Σ 上点 $M(x,y,z)$ 处的面密度，求曲面薄片 Σ 的总质量 $m(\Sigma)$.

[1] 分割 $\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2\cup\cdots\cup\Sigma_i\cup\cdots\cup\Sigma_n$，设 Σ_i 的面积为 ΔS_i

直径为d_i, $i=1,2,\cdots,n$, $\lambda=\max\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$.

(II) 近似：在Σ_i中任取一点$(x(\xi_i,\eta_i),y(\xi_i,\eta_i),z(\xi_i,\eta_i))$，作

$\rho(x(\xi_i,\eta_i),y(\xi_i,\eta_i),z(\xi_i,\eta_i))\cdot\Delta S_i \quad i=1,2,3,\cdots n$

(III) 求和：$\sum_{i=1}^{n}\rho(x(\xi_i,\eta_i),y(\xi_i,\eta_i),z(\xi_i,\eta_i))\Delta S_i \approx m(\Sigma)$.

(IV) 取极限：$\lim_{\lambda\to 0^+}\sum_{i=1}^{n}\rho(x(\xi_i,\eta_i),y(\xi_i,\eta_i),z(\xi_i,\eta_i))\Delta S_i \xlongequal{\text{若存在唯一}}$

$m(\Sigma)\triangleq\iint_{\Sigma}\rho(x,y,z)dS$ —— 第一型(类)的曲面积分.

此时，称$\rho(x,y,z)$在Σ上是Riemann可积的，记作$\rho\in R(\Sigma)$

当$\rho(x,y,z)$是定义在Σ上的有界函数时，上述极限可能

存在唯一，也可能不存在唯一。但当$\rho\in C(\Sigma)$时，上述极限

必存在唯一。即有：

$\rho\in C(\Sigma)\Longrightarrow\rho\in R(\Sigma)$ (不证明)

(三) 第一型曲面积分$\iint_{\Sigma}\rho(x,y,z)dS$的主要性质：

(1) 设$\rho_1,\rho_2\in R(\Sigma)$，$C_1,C_2$为任意常数，则

$\iint\limits_{\Sigma}(c_1\varphi_1+c_2\varphi_2)ds=c_1\iint\limits_{\Sigma}\varphi_1 ds+c_2\iint\limits_{\Sigma}\varphi_2 ds$（线性性质）

(2). 曲面Σ的面积$S(\Sigma)=\iint\limits_{\Sigma}1ds$.

(3). 若$\varphi(x,y,z)\in C(\Sigma)$，则有积分中值定理：

$\exists M_0\in\Sigma$，使$\iint\limits_{\Sigma}\varphi(x,y,z)ds=\varphi(M_0)S(\Sigma)$.

称$\varphi(M_0)=\iint\limits_{\Sigma}\varphi ds/S(\Sigma)$为$\varphi(x,y,z)$在$\Sigma$上取值的积分平均。

(4). 设Σ由有限个光滑曲面$\Sigma_1,\Sigma_2,\cdots,\Sigma_m$连接而成，则称

Σ是逐片光滑的，此时，有：

$$\iint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_2+\cdots+\Sigma_m}\varphi ds=\iint\limits_{\Sigma_1}\varphi ds+\iint\limits_{\Sigma_2}\varphi ds+\cdots+\iint\limits_{\Sigma_m}\varphi ds$$

(四) 第一型曲面积分的计算：

$\because ds=|\vec{r}_u'du\times\vec{r}_v'dv|=|\vec{r}_u'\times\vec{r}_v'|dudv=\sqrt{|\vec{r}_u'|^2|\vec{r}_v'|^2-(\vec{r}_u'\cdot\vec{r}_v')^2}\,dudv$

$=\sqrt{EG-F^2}\,dudv$，其中，$E=|\vec{r}_u'|^2=|(x_u',y_u',z_u')|^2=x_u'^2+y_u'^2+z_u'^2$

$G=|\vec{r}_v'|^2=|(x_v',y_v',z_v')|^2=x_v'^2+y_v'^2+z_v'^2$，$F=\vec{r}_u'\cdot\vec{r}_v'=(x_u',y_u',z_u')\cdot(x_v',y_v',z_v')$

$=x_u'x_v'+y_u'y_v'+z_u'z_v'$.

$\therefore I=\iint\limits_{\Sigma}\rho(x,y,z)dS=\iint\limits_{D_{uv}}\rho(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$，（式2）

即第一型曲面积分是通过化为参数域D_{uv}上的二重积分来计算的，证明的方法与第一型线积分的证明方法相同。

特别地，当Σ为显式曲面：$z=z(x,y)\in C(D_{xy})$时，可将x,y作为参变量，$r(x,y)=(x,y,z(x,y))\Rightarrow\begin{cases}r'_x=(1,0,z'_x)\\r'_y=(0,1,z'_y)\end{cases}$

$E=|r'_x|^2=1+z'^2_x$，$G=|r'_y|^2=1+z'^2_y$，$F=r'_x\cdot r'_y=z'_x z'_y\Rightarrow$

$dS=\sqrt{EG-F^2}\,dxdy=\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,dxdy\Rightarrow$

$I=\iint\limits_{\Sigma}\rho(x,y,z)dS=\iint\limits_{D_{xy}}\rho(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,dxdy$，（式3）

例1、计算球面Σ：$x^2+y^2+z^2=a^2\ (a>0)$的面积$S(\Sigma)$；

例2、设Σ是球面Σ_1：$x^2+y^2+z^2=a^2\ (a>0)$被柱面Σ_2：$x^2+y^2=ax$截下的部分，求Σ的面积$S(\Sigma)$。

解例1（方法一）：Σ的参数方程为：$\begin{cases}x=a\sin\theta\cos\varphi\\y=a\sin\theta\sin\varphi\\z=a\cos\theta\end{cases}$

（4）.

$$\Sigma: r(\theta,\varphi)=(a\sin\theta\cos\varphi,\ a\sin\theta\sin\varphi,\ a\cos\theta)\Rightarrow\begin{cases}|r'_\theta|^2=a^2=E\\ |r'_\varphi|^2=a^2\sin^2\theta=G\\ F=r'_\theta\cdot r'_\varphi=0\end{cases}$$

$$dS=\sqrt{EG-F^2}\,d\theta\,d\varphi=a^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

$$S(\Sigma)=\iint_\Sigma 1\,dS=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}a^2\sin\theta\,d\theta\right)d\varphi=4\pi a^2.$$

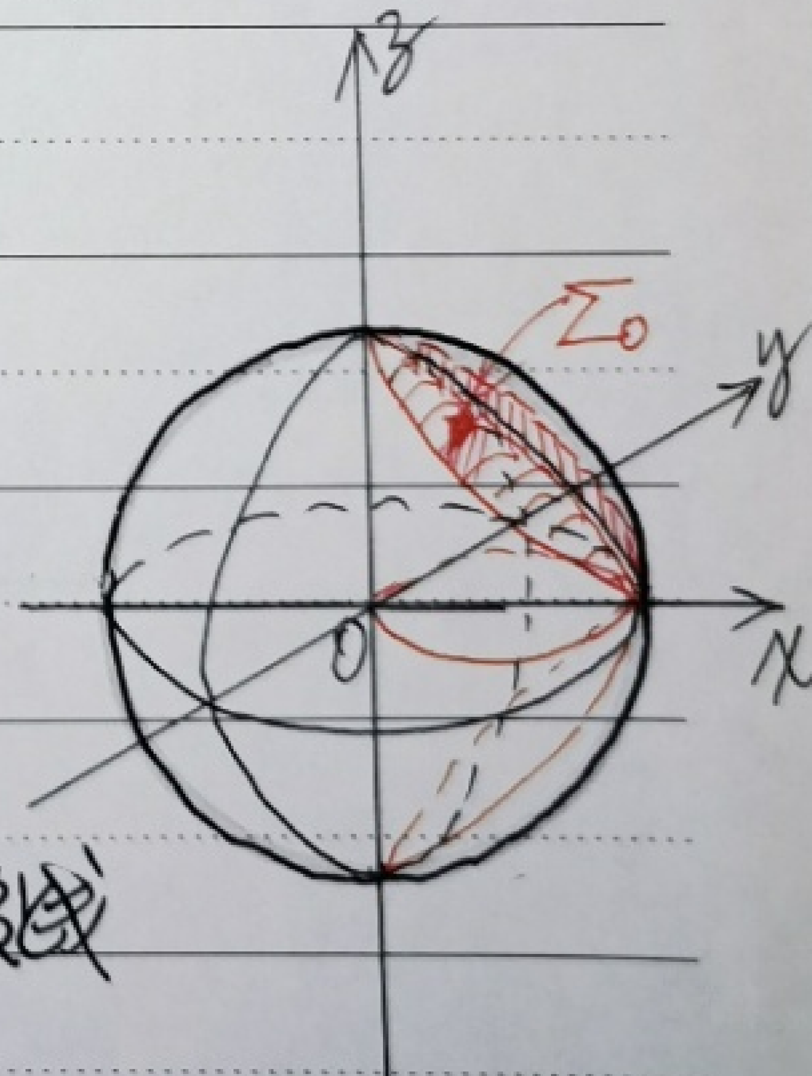
例1(方法二)：设Σ_1为Σ的上半部分：$\Sigma_1: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，$x^2+y^2\le a^2$.

则 $dS=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy=\sqrt{1+\left(\frac{-x}{z}\right)^2+\left(\frac{-y}{z}\right)^2}\,dxdy=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy$

$$S(\Sigma)=2\iint_{\Sigma_1}1\,dS=2\iint_{x^2+y^2\le a^2}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy\ \overset{x=r\cos\theta}{\underset{y=r\sin\theta}{=\!=\!=}}$$

$$2\int_0^{2\pi}\left(\int_0^a\frac{a\,r\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}}\right)d\theta=\frac{2a\cdot2\pi}{-2}\int_0^a(a^2-r^2)^{-\frac12}d(a^2-r^2)$$

$$=-2a\pi\frac{(a^2-r^2)^{\frac12}}{\frac12}\Big|_0^a=4\pi a^2.$$



练习：设Σ_0是Σ在第一卦限部分，

由对称性知，$S(\Sigma)=4\iint_{\Sigma_0}1\,dS$

令 $\begin{cases}x=a\sin\theta\cos\varphi\\ y=a\sin\theta\sin\varphi\\ z=a\cos\theta\end{cases}$ 则 $\begin{cases}\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]\\ \varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]\end{cases}$ 且从交线

$$x^2+y^2=a^2-z^2=ax\Rightarrow a^2-(a\cos\theta)^2=a(a\sin\theta\cos\varphi)\Rightarrow\sin\theta=\cos\varphi$$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}-\varphi\quad 即\ \begin{cases}0\le\theta\le\frac{\pi}{2}-\varphi\\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

从而 $S(\Sigma)=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varphi}a^2\sin\theta\,d\theta\right)d\varphi=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{(-\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-\varphi}\right\}d\varphi$

$=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\varphi)\,d\varphi=4a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$

(三) 第一型曲线积分 $\int_L f(x,y)\,ds$、$\int_L f(x,y,z)\,ds$ 的奇偶对称性与轮换对称性：

(1). 若 $f(x,y)\in C(L)$ 且 $f(x,y)$ 关于 y 为奇(偶)函数，则当 L 关于坐标轴 $y=0$ 对称时，有 $\int_L f\,ds=\begin{cases}0, & \text{当 } f \text{ 为奇} \\ 2\int_{L_1} f\,ds, & \text{当 } f \text{ 为偶}\end{cases}$

(2) 若 $f(x,y)\in C(L)$ 且当 x,y 互换时，L 的方程不变，则有：

$I=\int_L f(x,y)\,ds=\int_L f(y,x)\,ds=\frac{1}{2}\int_L\left(f(x,y)+f(y,x)\right)ds$

(3). 若 $f(x,y,z)\in C(L)$ 且 $f(x,y,z)$ 关于 z 为奇(偶)函数，当 L 关于坐标面 $z=0$ 对称时，有 $\int_L f\,ds=\begin{cases}0, & f \text{ 为奇} \\ 2\int_{L_1} f\,ds, & f \text{ 为偶}\end{cases}$

(4). 若 $f(x,y,z)\in C(L)$ 且当 $(x,y,z)\to(y,z,x)\to(z,x,y)$ 时，L 的方程不变，则有第一型线积分的轮换对称性：

$$I=\int_L\varphi(x,y,z)ds=\int_L\varphi(y,z,x)ds=\int_L\varphi(z,x,y)ds$$

$$=\frac{1}{3}\int_L[\varphi(x,y,z)+\varphi(y,z,x)+\varphi(z,x,y)]ds$$

第一型曲面积分 $\iint\limits_\Sigma\varphi(x,y,z)dS$ 也有类似的奇偶对称性与轮换对称性：

(例3. 计算 $I=\iint\limits_\Sigma(x^2+y^2)dS$，$\Sigma$是$x^2+y^2+z^2=a^2$在第一卦限部分。 答案 $\frac{1}{3}\pi a^4$.)

(1) 若$\varphi\in C(\Sigma)$且$\varphi(x,y,z)$关于z为奇(偶)函数，Σ关于坐标面$z=0$对称，则

$$\iint\limits_\Sigma\varphi(x,y,z)dS=\begin{cases}0, & \varphi\text{为奇}\sim\\ 2\iint\limits_{\Sigma_1}\varphi dS, & \varphi\text{为偶}\sim.\end{cases}$$

(2) 轮换对称性：设$\varphi(x,y,z)\in C(\Sigma)$且当$(x,y,z)\to(y,z,x)\to(z,x,y)$时，$\Sigma$的方程不变，则有：

(例4. 计算 $I=\iint\limits_\Sigma(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)dS$，$\Sigma$是锥面$z^2=k^2(x^2+y^2)$ $(z>0)$被柱面$x^2+y^2=2ax$截下的曲面。)

$$I=\iint\limits_\Sigma\varphi(x,y,z)dS=\iint\limits_\Sigma\varphi(y,z,x)dS=\iint\limits_\Sigma\varphi(z,x,y)dS=$$

$$\frac{1}{3}\iint\limits_\Sigma[\varphi(x,y,z)+\varphi(y,z,x)+\varphi(z,x,y)]dS$$ 答案：$\frac{\pi}{24}a^6(80k^2+7)\sqrt{1+k^2}$.

(3) 作业：EX11.2/ 1(1),(4),(6),(7)；2(2),(3)；3(1),(2).