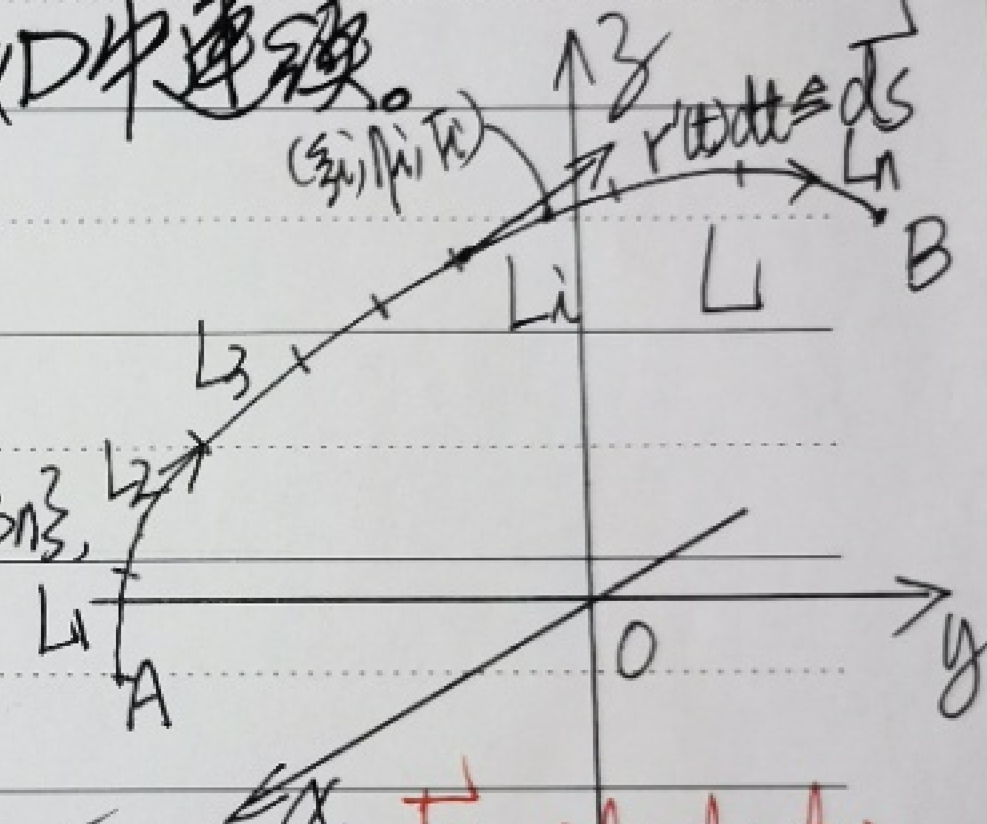
# 第28讲：第二类曲线积分：$\int_L \vec{F}(x,y,z)\cdot\vec{ds}$

## (一) 概念与主要性质：

例1. 求力场 $\vec{A}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ 沿光滑曲线 $L$：$r(t)=(x(t),y(t),z(t))\in C^1[\alpha,\beta]$ 做的功 $W$.

其中 $L\subset D$，而 $\vec{A}(x,y,z)$ 在区域 $D$ 中连续。




(I) 分割：$L=L_1+L_2+\cdots+L_i+\cdots+L_n$

设 $\Delta s_i$ 为 $L_i$ 的弧长，$\lambda=\max\{\Delta s_1,\cdots,\Delta s_n\}$，

$\overrightarrow{\Delta s_i}=(\Delta x_i,\Delta y_i,\Delta z_i)$，$i=1,2,\cdots n$

$\vec{ds}=(dx,dy,dz)$

(II) 近似：任取 $(\xi_i,\eta_i,\tau_i)\in L_i$，作内积：$\vec{A}(\xi_i,\eta_i,\tau_i)\cdot\overrightarrow{\Delta s_i}$ （以直近似）

(III) 求和：$\sum_{i=1}^{n}\vec{A}(\xi_i,\eta_i,\tau_i)\cdot\overrightarrow{\Delta s_i}\approx W$

(IV) 极限：$\lim_{\lambda\to0^+}\sum_{i=1}^{n}\vec{A}(\xi_i,\eta_i,\tau_i)\cdot\overrightarrow{\Delta s_i}\xlongequal{\text{存在且唯一}}W$

$$\triangleq\int_L\vec{A}(x,y,z)\cdot\vec{ds}=\int_L Pdx+Qdy+Rdz \qquad (☆1)$$

称 $\vec{ds}=(dx,dy,dz)=r'(t)dt$ 为指向弧长元。

主要性质：(1)设 $\vec{A}_1(x,y,z)$，$\vec{A}_2(x,y,z)\in C(D)$，$L\subset D$.

$c_1,c_2$ 为任意常数）则

(1). $\int_L (c_1\vec{A}_1+c_2\vec{A}_2)\cdot d\vec{s}=c_1\int_L \vec{A}_1\cdot d\vec{s}+c_2\int_L \vec{A}_2\cdot d\vec{s}$

(2). $\int_{L_1+L_2}\vec{A}\cdot d\vec{s}=\int_{L_1}\vec{A}\cdot d\vec{s}+\int_{L_2}\vec{A}\cdot d\vec{s}$

(3). $\int_{L_{AB}}\vec{A}\cdot d\vec{s}=-\int_{L_{BA}}\vec{A}\cdot d\vec{s}$ （第二型曲线积分具有方向性！）

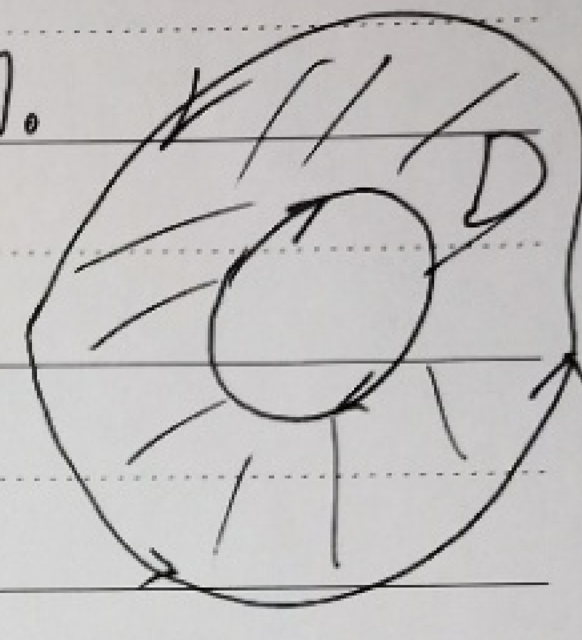
(4) 设 $L$ 是有向直线段，且位于 $x$ 轴上的 $[a,b]$，此时 $y\equiv 0$，$z\equiv 0\Rightarrow dy=0$，$dz=0\Rightarrow \int_L \vec{A}(x,y,z)\cdot d\vec{s}=$

$\int_L P(x,0,0)dx+Q(x,0,0)dy+R(x,0,0)dz=\int_a^b P(x,0,0)dx$

即第二型线积分是定积分的推广！

当 $L$ 为闭曲线（有向）时，称 $\oint_L \vec{A}(x,y,z)\cdot d\vec{s}$ 为向量场 $\vec{A}$ 沿 $L$ 的环流量。当区域 $D$ 总在 $\partial D=L$ 的左侧时，称 $L$ 为 $D$ 的正向边界。当 $D$ 是单连通区域，即 $D$ 中任意闭路

若D可在D中缩成一点的区域时，$\partial D$的正向就是逆时针方向；当D是多连通区域，即D中有洞的区域时，$\partial D$的正向为外边界逆时针，内边界则顺时针方向。




(三)计算方法：

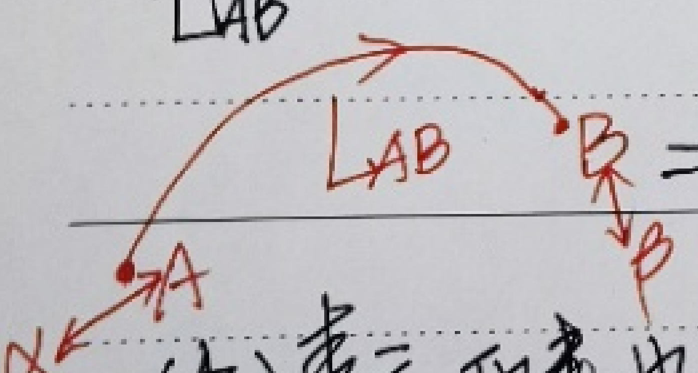
利用 $|\vec{ds}| = |(dx,dy,dz)| = |(x'(t),y'(t),z'(t))dt|$

$$= |r'(t)|dt = ds = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2} \Leftrightarrow \left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1$$

令 $\frac{dx}{ds}=\cos\alpha,\ \frac{dy}{ds}=\cos\beta,\ \frac{dz}{ds}=\cos\gamma$ 则 $\begin{cases} dx=\cos\alpha\, ds \\ dy=\cos\beta\, ds \\ dz=\cos\gamma\, ds \end{cases}$

其中$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$是$(x,y,z)$的函数. $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$为单位向量、

$$\int_{L_{AB}} \vec{A}(x,y,z)\cdot\vec{ds} = \int_{L_{AB}} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$




$$= \int_{L_{AB}} (P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma)ds \quad (*)$$

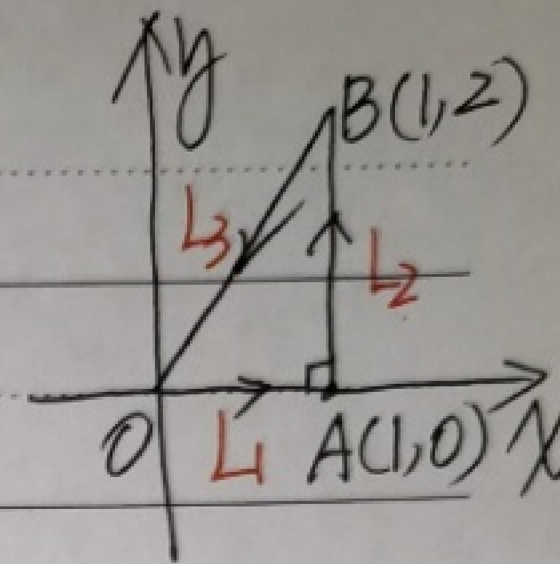
(*)表示两类曲线积分可以互相转换。而(*)可化为参数t的定积分. 因此，$\int_{L_{AB}} \vec{A}(x,y,z)\cdot\vec{ds} = \int_\alpha^\beta [P(x(t),y(t),z(t))\cos\alpha(t)+$

$Q(x(t),y(t),z(t))\cos\beta(t)+R(x(t),y(t),z(t))\cos\gamma(t)]\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt$



其中α对应起点A，β对应终点B！

例1. 设L为△OAB的正向边界如图所示：




$$L=L_1+L_2+L_3,\ \begin{cases} L_1: 0\le x\le 1,\ y\equiv 0;\ x=x \\ L_2: 0\le y\le 2,\ x\equiv 1;\ y=y \\ L_3: \begin{cases} y=2x \\ x=x \end{cases},\ x:从1\to 0. \end{cases}$$

计算 $I=\oint_L xy\,dx+x^2dy$

解：$I=\int_{L_1}xy\,dx+x^2dy+\int_{L_2}xy\,dx+x^2dy+\int_{L_3}xy\,dx+x^2dy$

而 $\int_{L_1}xy\,dx+y^2dy \xlongequal{y\equiv 0\Rightarrow dy=0} \int_0^1 x\cdot 0\,dx=0$； $\int_{L_2}xy\,dx+x^2dy \xlongequal[y=y]{x\equiv 1,\ dx=0}$

$\int_0^2 1^2dy=2$； $\int_{L_3}xy\,dx+x^2dy \xlongequal[x:\ 1\to 0]{\begin{cases}x=x\\ y=2x\end{cases}} \int_1^0 x\cdot 2x\,dx+x^2d(2x)=\int_1^0 4x^2dx$

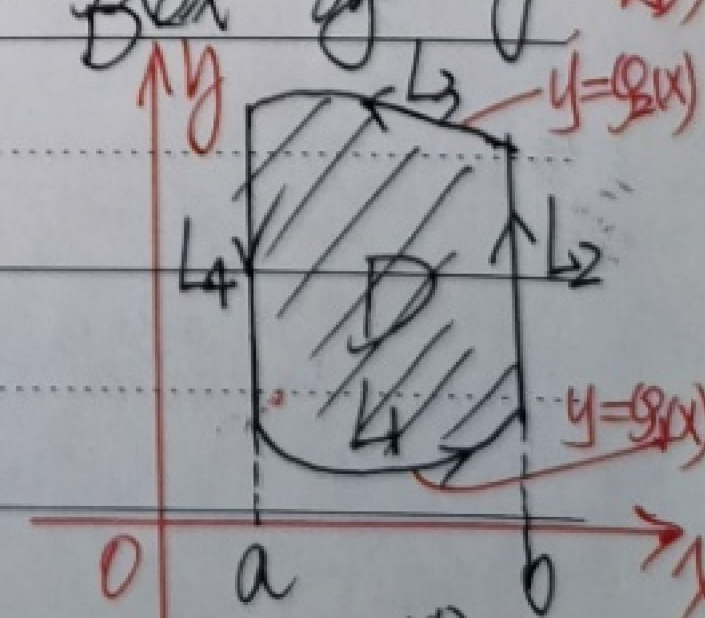
$=-\frac{4}{3}$. $\therefore I=0+2-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$，即：力 $\vec{F}(x,y)=(xy,x^2)$ 沿闭路L

所做的功量为 $\frac{2}{3}$。

例2. 设D是xOy平面中的区域，$P(x,y),Q(x,y)\in C^1(D)$，$L=\partial D$

是D的正向边界，证明：$\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$ (公式)

(公式)称为Green(格林)公式。




证：(I) 设D是上、下型区域 $\begin{cases}\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\\ a\le x\le b\end{cases}$

$L=\partial D=L_1+L_2+L_3+L_4$.

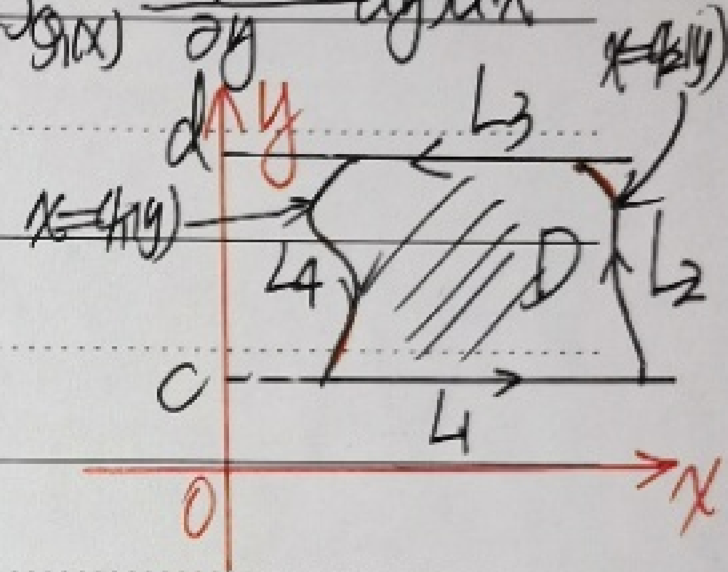
而 $\oint_L P(x,y)dx = \int_{L_1} Pdx + \int_{L_2} Pdx + \int_{L_3} Pdx + \int_{L_4} Pdx$ 且

$\int_{L_1} P(x,y)dx = \int_a^b P(x,\varphi_1(x))dx$；$\int_{L_2} P(x,y)dx \xlongequal{x=b,\,dx=0} 0$；$\int_{L_3} P(x,y)dx$

$= \int_b^a P(x,\varphi_2(x))dx = -\int_a^b P(x,\varphi_2(x))dx$；$\int_{L_4} Pdx \xlongequal{x=a,\,dx=0} 0$.

$\therefore \oint_L P(x,y)dx = -\int_a^b [P(x,\varphi_2(x)) - P(x,\varphi_1(x))]dx = -\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dy\right)dx$

$= -\iint_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dxdy$




(二) 设D是左右型区域 $\begin{cases} \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y) \\ c \le y \le d \end{cases}$

$L = \partial D = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$ 如图. 则

$\oint_L Q(x,y)dy = \int_{L_1} Qdy + \int_{L_2} Qdy + \int_{L_3} Qdy + \int_{L_4} Qdy$

$\int_{L_1} Q(x,y)dy \xlongequal{y=c,\,dy=0} 0$；$\int_{L_2} Q(x,y)dy = \int_c^d Q(\psi_2(y),y)dy$；$\int_{L_3} Qdy \xlongequal{y=d,\,dy=0} 0$

$\int_{L_4} Q(x,y)dy = \int_d^c Q(\psi_1(y),y)dy = -\int_c^d Q(\psi_1(y),y)dy$

$\therefore \oint_L Q(x,y)dy = \int_c^d [Q(\psi_2(y),y) - Q(\psi_1(y),y)]dy = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}dxdy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy$

(三) 当D既是上下型区域又是左右型区域时，(称为标准图域) 有

$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$ 或曲边矩形域.

特别地，当 $P(x,y)=-y$，$Q(x,y)=x$ 时 有

$$\oint_L -y\,dx+x\,dy=\iint_D[1-(-1)]\,dx\,dy=2S(D)\Longleftrightarrow$$

$$S(D)=\frac{1}{2}\oint_L -y\,dx+x\,dy \qquad (公式)$$

例3. 求椭圆 $\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=b\sin\theta\end{cases}$ $\theta\in[0,2\pi]$ 的面积。

解：$S(D)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(-b\sin\theta)\,d(a\cos\theta)+(a\cos\theta)\,d(b\sin\theta)$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}ab(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}ab\,d\theta=\pi ab.$$

例4. 计算：

$$I=\oint_L\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2},$$

L是正向圆周：$x^2+y^2=a^2$ $(a>0,\ 常数)$

解：令 $\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=a\sin\theta\end{cases}$，则 $\theta$ 从 $0$ 到 $2\pi$.

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{(a\sin\theta)^2+(a\cos\theta)^2}{a^2}\,d\theta=\int_0^{2\pi}1\,d\theta=2\pi.$$

可以证明，当L是绕原点一周的分段正向曲线(光滑)时，恒有：

$$\oint_L\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}=2\pi.$$

(三)作业：

EX11.3: 1/(1),(3),(4); 2; 3; 4/(1); 5/(1),(2).

即"曲边梯形域".

注：当平面区域D本身不是"某种简单域"，但可分割为有限个"某种简单域"时，可在每个"某种简单域"上用Green公式，最后相加，我们可得到整个区域D上的Green公式，详见第29讲讲稿。