第25讲：第一类曲线积分：$\int_{\Gamma} f(x,y,z)ds$

(一) 定义与主要性质：

(1) 定义：设L为xoy平面中的一段光滑曲线：$r(t)=(x(t),y(t))$ $\in C^1[\alpha,\beta]$ 且 $r'(t)=(x'(t),y'(t))\neq\theta$，$\forall t\in[\alpha,\beta]$. 函数$g(x,y)$在L上有定义且有界.

(I) 分割L为n个部分：$L=L_1\cup L_2\cup\cdots\cup L_i\cup\cdots\cup L_n$，设弧段$L_i$的长度$\Delta(L_i)=\Delta S_i$，$i=1,2,\cdots,n$. $\lambda=\max\{\Delta S_1,\Delta S_2,\cdots\Delta S_n\}$.

(II) 近似：在L_i上任取一点$(x(\tau_i),y(\tau_i))$，作$g(x(\tau_i),y(\tau_i))\Delta S_i$.

(III) 求和：$\sum_{i=1}^{n} g(x(\tau_i),y(\tau_i))\Delta S_i$

(IV) 极限：$\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\sum_{i=1}^{n} g(x(\tau_i),y(\tau_i))\Delta S_i$ 若存在且唯一.

则称此极限值为$g(x,y)$在曲线段L上的第一型(类)线积分.

记作：$\int_L g(x,y)ds=\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\sum_{i=1}^{n} g(x(\tau_i),y(\tau_i))\Delta S_i$ (*1)

(*1)也称为数量场$g(x,y)$在L上的线积分。

可证明：$g\in C(L)$时，必有$g\in R(L)$ (L上Riemann可积) (1)

(2) 主要性质：由于第一型线积分的定义与定积分的定义相同，可见，当 L 落在位于 Ox 轴上的直线段 $[a, b]$ 时，$g(x, y)$ 在 L 上的线积分即是定积分：$\int_a^b g(x, 0)dx$

因此，第一型的线积分也有"十大"性质，如线性性质：

$\int_L (c_1 f + c_2 g) ds = c_1 \int_L f ds + c_2 \int_L g ds$，$c_1, c_2$ 为任意常数。

其中，f, g 在 L 上 Riemann 可积，即 $f, g \in R(L)$

又如，当 $g(x, y) \in C(L)$ 时，必有 $M_0 \in L$，使积分中值公式成立：

$\int_L g(x, y) ds = g(M_0) s(L) \Leftrightarrow g(M_0) = \int_L g(x, y) ds / s(L)$ 为 $g(x, y)$ 在曲线段 L 上取值的积分平均。

若 L 是由分段光滑的曲线 L_1, L_2 连接而成的，则也有线积分关于积分区域的可加性：

$$\int_{L_1 \cup L_2} g(x, y) ds = \int_{L_1} g(x, y) ds + \int_{L_2} g(x, y) ds$$

当 $g(x, y, z)$ 在分段光滑的空中曲线 L 上连续时，

同样可定义：$\int_L \varphi(x,y,z)ds=\lim\limits_{\lambda\to0^+}\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi(x(\tau_i),y(\tau_i),z(\tau_i))\Delta S_i$ （※2）

$\int_L \varphi(x,y,z)ds$ 同样也有"十大"性质。

(三) 第一型线积分 $\int_L \varphi(x,y)ds$，$L: r(t)=(x(t),y(t))\in C^1[\alpha,\beta]$

的计算方法：(设 $\varphi\in C(L)$)

在(※1)中，ΔS_i 是弧段 L_i 的弧长，设 L_i 为 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$ $t\in[t_{i-1},t_i]$

则 $\Delta S_i=\int_{t_{i-1}}^{t_i}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt=\int_{t_{i-1}}^{t_i}|r'(t)|dt \xlongequal{\text{积分中值定理}} |r'(\theta_i)|\Delta t_i$

但是，$\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi(x(\tau_i),y(\tau_i))|r'(\theta_i)|\Delta t_i$ 不是 Riemann 和。然而，

$\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi(x(\tau_i),y(\tau_i))|r'(\theta_i)|\Delta t_i=\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi(x(\tau_i),y(\tau_i))|r'(\tau_i)|\Delta t_i+$

$\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi(x(\tau_i),y(\tau_i))(|r'(\theta_i)|-|r'(\tau_i)|)\Delta t_i$，且

$\lim\limits_{\lambda\to0^+}\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi(x(\tau_i),y(\tau_i))|r'(\tau_i)|\Delta t_i=\int_\alpha^\beta\varphi(x(t),y(t))|r'(t)|dt=\int_L\varphi(x,y)ds$

$\lim\limits_{\lambda\to0^+}\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi(x(\tau_i),y(\tau_i))||r'(\theta_i)|-|r'(\tau_i)||\Delta t_i=0$ $(\because \varphi(x,y)\in C(L)$

$x(t),y(t)\in C^1[\alpha,\beta]$，$\therefore \varphi(x(t),y(t))\in C[\alpha,\beta]\Rightarrow\varphi(x(t),y(t))$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有界；

$\exists M>0$，使 $|f(x(t),y(t))|\le M$，$\forall t\in[\alpha,\beta]$，且 $|r'(t)|=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上 C

从而 $|r'(t)|$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致 C，即对 $\underbrace{\forall\varepsilon>0}_{①}$，$\underbrace{\exists\delta>0}_{②}$，对 $\forall\tau_i,\theta_i\in[\alpha,\beta]$，

当 $|\tau_i-\theta_i|<\delta$ 时，必有 $\big||r'(\tau_i)|-|r'(\theta_i)|\big|\le|r'(\tau_i)-r'(\theta_i)|<\varepsilon$。当 $\underbrace{\text{取}\ \lambda<\delta\ \text{时}}_{③}$

$\because \tau_i,\theta_i\in[t_{i-1},t_i]\subset[\alpha,\beta]$ 且 $|\tau_i-\theta_i|\le\Delta t_i\le\lambda<\delta$ 必有 $\big||r'(\tau_i)|-|r'(\theta_i)|\big|<\varepsilon$，

从而 $\left|\sum_{i=1}^{n}f(x(\tau_i),y(\tau_i))\big(|r'(\tau_i)|-|r'(\theta_i)|\big)\Delta t_i\right|\le\sum_{i=1}^{n}M\varepsilon\Delta t_i=\underbrace{M(\beta-\alpha)\varepsilon}_{④}$.）

即 $\int_L f(x,y)ds$ 的计算方法是，将 L 的参数表达式 $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$

代入积分 $\int_L f(x,y)ds$ 中，使其中化为参数 t 的定积分：

$$I=\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt \qquad (\text{式}3)$$

同理，在 $\int_L f(x,y,z)ds$ 中，若 L 为 $r(t)=(x(t),y(t),z(t))\in C^1[\alpha,\beta]$

则 $I=\int_L f(x,y,z)ds=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt$ （式4）.

在（式3）中，若 L 为 $y=f(x)\in C^1[a,b]$，则 $ds=\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$；若 L 为 $\rho=\rho(\theta)\in C^1[\alpha,\beta]$，则 $ds=\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\,d\theta$，（式3）相应地表达。

$I=\int_L \varphi(x,y)ds=\int_a^b \varphi(x,f(x))\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$;

$I=\int_L \varphi(x,y)ds=\int_\alpha^\beta \varphi(\rho(\theta)\cos\theta,\rho(\theta)\sin\theta)\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\,d\theta$.

特别地，当被积函数 $\varphi(x,y)=1$ 或 $\varphi(x,y,z)=1$ 时，有

$\int_L \varphi(x,y)ds=\int_L 1ds=S(L)$，$\int_L \varphi(x,y,z)ds=\int_L 1ds=S(L)$

即被积函数为1的第一类曲线积分是积分弧段L的弧长。

(三) 例题：

$L:\begin{cases}x=x\\ y=\frac{4}{3}\sqrt{x\sqrt{2ax}}=\frac{4}{3}\sqrt[4]{2a}\,x^{\frac{3}{4}}\\ z=\sqrt{2ax}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'_x=1\\ y'_x=\sqrt[4]{2a}\,x^{-\frac{1}{4}},\ x\in[0,2a]\\ z'_x=\frac{a}{\sqrt{2ax}}\end{cases}$

例1：设L为 $\begin{cases}z^2=2ax\\ 9y^2=16xz\end{cases}$ 求从点O(0,0,0)到点 $A(2a,\frac{8a}{3},2a)$

的L的弧长S(L)。 $=\int_0^{2a}ds=\int_0^{2a}\sqrt{1+y'^2_x+z'^2_x}\,dx=\int_0^{2a}\sqrt{1+\sqrt{2a}\,x^{-\frac{1}{2}}+\frac{a}{2x}}\,dx$

(弧长为4a) $=\int_0^{2a}\sqrt{(1+\sqrt{\frac{a}{2x}})^2}\,dx=\int_0^{2a}(1+\sqrt{\frac{a}{2x}})dx$

$=4a$.

例2. 求下列曲线积分I： $L=\overline{AB}+\overline{BC}$

(1)、$\int_L(x+y+z)ds$，L由A(1,1,0)到B(1,0,0)的直线，再由螺旋线

$\overline{AB}$：$x=1,y=y,z=0$，$ds=\sqrt{x'^2_y+y'^2_y+z'^2_y}\,dy=\sqrt{0+1+0}\,dy=dy$

BC：$x=\cos t,y=\sin t,z=t\ (0\le t\le 2\pi)$ 组成的分段光滑曲线。

(2) $\int_L x\,ds$，L为对数螺线 $r=ae^{k\varphi}(k>0)$ 在圆 $r=a$ 内

的那一段。(注：$r=ae^{k\varphi}=\begin{cases}>a, & \varphi>0：圆外\\ =a & \varphi=0\ 圆上\\ <a & \varphi<0\ 圆内\end{cases}$)

(答案：$\frac{2a^2k\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}$)

(3). $\oint_L x^2 ds$，曲线L为空间圆周：$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$，$a>0$常.

(4). $\oint_L (xy+xz+yz)ds$，L为空间圆周：$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$，$a>0$，常.

(参考答案：(1). $\frac{3}{2}+2\sqrt{2}\pi^2$；(2). $2a^2k\sqrt{1+k^2}/(4k^2+1)$；(3). $\frac{2}{3}\pi a^3$；

(4). $-\pi a^3$. 注：计算(3),(4)时注意积分区域与被积函数的对称性)

(四). 线积分 $I=\int_L f(x,y,z)ds$ 的轮换对称性：

此时称L具有轮换对称性。

若 $(x,y,z)\longrightarrow(y,z,x)\longrightarrow(z,x,y)$ 时，L的方程不变，(如(3),(4)两例)

即是如此. 则 $I=\int_L f(x,y,z)ds=\int_L f(y,z,x)ds=\int_L f(z,x,y)ds=$

$\frac{1}{3}\int_L[f(x,y,z)+f(y,z,x)+f(z,x,y)]ds$

对重积分：$\iint_D f(x,y)dxdy$，$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz$ 及面积分 $\iint_\Sigma f(x,y,z)dS$

同样也具有轮换对称性。(当D或Ω或Σ具有轮换对称性时)

五. 作业：ex11.1

1/(1),(3),(4)； 2/(2),(3),(10),(11),(12)； 3； 4；

第25讲（附录）：例2四个小题的计算参考答案：

解(1)：直线$\overline{AB}$的参数方程为 $\begin{cases} x\equiv 1=1+0y \\ y=y \\ z\equiv 0=0+0y \end{cases}$，$0\le y\le 1$

从而 $ds=\sqrt{x_y'^2+y_y'^2+z_y'^2}\,dy=\sqrt{0+1+0}\,dy=dy$，$0\le y\le 1$。而在

曲线$\overline{BC}$上，$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=t \end{cases}$，$0\le t\le 2\pi \Rightarrow ds=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}\,dt=\sqrt{2}\,dt$

由线积分关于积分区域的可加性，

$\int_L (x+y+z)ds=\int_{\overline{AB}}(x+y+z)ds+\int_{\overline{BC}}(x+y+z)ds=\int_0^1(1+y+0)dy+$

$\int_0^{2\pi}(\cos t+\sin t+t)\sqrt{2}\,dt=1+\frac{1}{2}+0+0+\sqrt{2}\,\frac{t^2}{2}\Big|_0^{2\pi}=\frac{3}{2}+2\sqrt{2}\pi^2$；

解(2)：从L：$r(\varphi)=ae^{k\varphi}$ $(k>0)$知，当$-\infty<\varphi<0$时，$r(\varphi)$在

圆$x^2+y^2=a^2$的内部，且$\begin{cases} x=r(\varphi)\cos\varphi \\ y=r(\varphi)\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow ds=\sqrt{x'^2(\varphi)+y'^2(\varphi)}\,d\varphi$

$=\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}\,d\varphi=\sqrt{a^2e^{2k\varphi}+a^2k^2e^{2k\varphi}}\,d\varphi=ae^{k\varphi}\sqrt{1+k^2}\,d\varphi$

$I=\int_{-\infty}^0 r(\varphi)\cos\varphi\,(ae^{k\varphi})\sqrt{1+k^2}\,d\varphi=\int_{-\infty}^0 ae^{k\varphi}\cos\varphi\,(ae^{k\varphi})\sqrt{1+k^2}\,d\varphi$

$=a^2\sqrt{1+k^2}\int_{-\infty}^0\cos\varphi\, e^{2k\varphi}d\varphi$，令$I_0=\int_{-\infty}^0\cos\varphi\, e^{2k\varphi}d\varphi$ 则

$I_0=\int_{-\infty}^0 e^{2k\varphi}d\sin\varphi=\sin\varphi\, e^{2k\varphi}\Big|_{-\infty}^0-2k\int_{-\infty}^0 e^{2k\varphi}\sin\varphi\, d\varphi$

$=0+2k\int_{-\infty}^{0} e^{2k\varphi}\, d\cos\varphi = 2k\left[\cos\varphi\, e^{2k\varphi}\Big|_{-\infty}^{0} - 2k\int_{-\infty}^{0}\cos\varphi\, e^{2k\varphi}\, d\varphi\right]$

$=2k[1-2kI_0]=2k-4k^2I_0 \Rightarrow I_0=\frac{2k}{1+4k^2}$.

故 $I=a^2\sqrt{1+k^2}\,I_0=2ka^2\sqrt{1+k^2}/(1+4k^2)$.

解(3). 因积分区域 $L\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 具有轮换对称性.

故 $I=\oint_L x^2 ds=\oint_L y^2 ds=\oint_L z^2 ds=\frac{1}{3}\oint_L (x^2+y^2+z^2)ds$

$=\frac{1}{3}\oint_L a^2 ds=\frac{a^2}{3}\oint_L 1 ds=\frac{a^2}{3}s(L)=\frac{a^2}{3}\cdot 2\pi a=\frac{2\pi}{3}a^3$.

(注: $f(x,y,z)=x^2+0y^2+0z^2 \Rightarrow f(y,z,x)=y^2+0z^2+0x^2,\ f(z,x,y)=z^2+0x^2+0y^2$)

解(4): 由 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Rightarrow (x+y+z)^2=0^2 \Rightarrow x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)=$

$0 \Rightarrow xy+xz+yz=-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)=-\frac{a^2}{2}$ 代入

$I=\oint_L (xy+xz+yz)ds=\oint_L\left(-\frac{a^2}{2}\right)ds=-\frac{a^2}{2}\oint_L 1ds=-\frac{a^2}{2}s(L)$

$=-\frac{a^2}{2}(2\pi a)=-\pi a^3$.

注: 在曲线积分与曲面积分中, 可以将曲线L或曲面Σ的方程式直接代入积分中。但在重积分中不可以!