第22讲：重积分的计算与证明

(一) 三重积分 $I=\iiint_\Omega f(x,y,z)dV$ 的奇偶对称性 (设 $f\in C(\Omega)$)

(1). 若 $f(x,y,z)$ 关于 z 是奇(偶)函数，且 Ω 关于 $z=0$ 的坐标面对称，则 $\iiint_\Omega f(x,y,z)dV=0$ $\left(=2\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)dV\right)$，其中 Ω_1 是 Ω 在坐标面 xOy 之上或之下部分。余类推。

(2) 若 $f(x,y,z)$ 关于 x,y,z 分别都是偶函数，且 Ω 关于三个坐标面 $x=0$；$y=0$；$z=0$ 都对称，则必有

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dV=8\iiint_{\Omega_0} f(x,y,z)dV,$$ Ω_0 是 Ω 在第一卦限部分。

例1. 再次计算椭球体 Ω: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$ 的体积 $V(\Omega)$

解: ∵ $V(\Omega)=\iiint_\Omega 1\,dxdydz$ 且 $f(x,y,z)\equiv 1$ 关于 x、y、z 分别是偶函数，Ω 关于三个坐标面 $x=0$、$y=0$、$z=0$ 都对称，故 $V(\Omega)=8\iiint_{\Omega_0} 1\,dxdydz$，$\Omega_0$ 是 Ω 在第一卦限部分. 作广义球坐标变换 $\begin{cases} x=ar\sin\theta\cos\varphi \\ y=br\sin\theta\sin\varphi \\ z=cr\cos\theta \end{cases}$，则 $\begin{cases} 0\le r\le 1 \\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2} \\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2} \end{cases}$ (1).

$dV=dxdydz=\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}\right|drd\theta d\varphi=abcr^2\sin\theta drd\theta d\varphi$

$V(\Omega)=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\int_0^1 abcr^2\sin\theta dr)d\theta)d\varphi$

$=8abc(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta)(\int_0^1 r^2dr)(\int_0^{\frac{\pi}{2}}1d\varphi)=\frac{4}{3}\pi abc.$

例2. 计算曲面Σ：$(x^2+y^2)^2+z^4=y$ 围成的区域Ω的

解：$V(\Omega)=\iiint_{\Omega}1dV$ (cch10练/6)

分析：(1°) 从 $(x^2+y^2)^2+z^4=y\geq0$ 知，立体Ω位在半空间 $y\geq0$ 中存在，(2°) 从 $-x$ 代 x，$-z$ 代 z 后Ω的方程即Σ的方程不变知，Ω关于 $x=0$，$z=0$ 两坐标面对称，且 $f(x,y,z)\equiv1$ 关于 x，z 分别都是偶函数，故有

$V(\Omega)=4\iiint_{\Omega_0}1dxdydz$，$\Omega_0$ 是Ω在第一卦限部分.

作球坐标变换 $\begin{cases}x=r\sin\theta\cos\varphi\\y=r\sin\theta\sin\varphi\\z=r\cos\theta\end{cases}$ 且 $\begin{cases}(r^2\sin^2\theta)^2+(r^2\cos^2\theta)^2\leq y=r\sin\theta\sin\varphi\\0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\\0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}.\end{cases}$

即 $0\leq r\leq\left(\frac{\sin\theta\sin\varphi}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}\right)^{\frac{1}{3}}$.

(2).

$$V(\Omega)=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\left(\frac{\sin\theta\sin\varphi}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}\right)^{\frac{1}{3}}}\sin\theta\, r^2dr\right)d\theta\right)d\varphi$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\theta\sin\varphi}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}d\theta\right)d\varphi=\frac{4}{3}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\theta d\theta}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}\right)$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^2\theta\sec^2\theta}{1+\tan^4\theta}d\theta=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^2\theta\, d\tan\theta}{1+\tan^4\theta}\xlongequal{\tan\theta=u}$$

$=\frac{4}{3}\int_0^{+\infty}\frac{u^2du}{1+u^4}$，令 $I_0=\int_0^{+\infty}\frac{u^2du}{1+u^4}$ 则

$$I_0\xlongequal{u=\frac{1}{v}}\int_{+\infty}^0\frac{\frac{1}{v^2}\cdot\frac{-1}{v^2}dv}{1+\frac{1}{v^4}}=\int_0^{+\infty}\frac{dv}{1+v^4}=\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^4}\Rightarrow$$

$$2I_0=\int_0^{+\infty}\frac{u^2+1}{1+u^4}du=\int_0^{+\infty}\frac{1+u^{-2}}{u^{-2}+u^2}du=\int_0^{+\infty}\frac{d(u-\frac{1}{u})}{(u-\frac{1}{u})^2+2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{u-\frac{1}{u}}{\sqrt{2}}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})\right)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\Rightarrow I_0=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

$$V(\Omega)=\frac{4}{3}I_0=\frac{4}{3}\times\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{3}\pi.$$

例3. 设 $(a,b,c)\neq\theta=(0,0,0)$ 为常向量，$f(x)$ 连续函数。

$\Omega: x^2+y^2+z^2\leq R^2$（$R>0$ 常数）. 证明:

$$\iiint_\Omega f(ax+by+cz)dV=\pi\int_{-R}^{R}f(\lambda u)(R^2-u^2)du,\ \lambda=\sqrt{a^2+b^2+c^2}>0.$$

证: 设 $A=\begin{pmatrix}\frac{a}{\lambda} & \frac{b}{\lambda} & \frac{c}{\lambda}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$ 为正交矩阵, 即满足 $A^T=A^{-1}$ 的三阶方阵. 作正交变换: $\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{a}{\lambda} & \frac{b}{\lambda} & \frac{c}{\lambda}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

- 则 $u=\frac{a}{\lambda}x+\frac{b}{\lambda}y+\frac{c}{\lambda}z \Leftrightarrow ax+by+cz=\lambda u$，$\lambda=\sqrt{a^2+b^2+c^2}>0$.

且从 $A^T=A^{-1}\Rightarrow AA^T=E\Rightarrow |AA^T|=|A||A^T|=|A|^2=|E|=1\Rightarrow$

$|A|=\pm1$. 即正交矩阵的行列式恒为 ±1. orthogonal transformation

在几何中, $|A|=+1$ 的正交变换称为旋转变换；$|A|=-1$ 的

- 正交变换称为绕轴对称变换或镜面反射变换。

即 $dV=dxdydz=\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|dudvdw=\frac{dudvdw}{\left|\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\right|}=\frac{dudvdw}{||A||}$

$=\frac{dudvdw}{|\pm1|}=dudvdw$. 且

$R^2\geq x^2+y^2+z^2=(x,y,z)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$; $u^2+v^2+w^2=(u,v,w)\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=(x,y,z)A^TA\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

- $=(x,y,z)E\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=(x,y,z)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=x^2+y^2+z^2\leq R^2$

即正交变换一定是保距变换, 此外, 从 $\begin{cases}\vec{\alpha}=A\vec{x}\\ \vec{\beta}=A\vec{y}\end{cases}$，A是正交阵 $\Rightarrow$

$\cos(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{\|\vec{\alpha}\|\|\vec{\beta}\|}=\frac{\vec{\alpha}^T\vec{\beta}}{\|\vec{\alpha}\|\|\vec{\beta}\|}=\frac{\vec{x}^TA^TA\vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|}=\frac{\vec{x}^TE\vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|}=\frac{\vec{x}^T\vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|}=\cos(\vec{x},\vec{y})$

知，正交变换是保持角度不变的变换——保角变换！

- 从而 $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leq R^2} f(ax+by+cz)\,dV=\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\leq R^2} f(\lambda u)\,dudvdw$ (4)

$=\int_{-R}^{R} f(\lambda u)\,du \iint\limits_{v^2+w^2\le R^2-u^2} 1\,dv\,dw = \pi\int_{-R}^{R} f(\lambda u)(R^2-u^2)\,du$

当f是奇函数时，$\iiint\limits_{\Omega} f(ax+by+cz)\,dV=0$.

例4. ch10综/8：$(a,b)\ne 0=(0,0)$. $f\in C$. $\lambda=\sqrt{a^2+b^2}>0$.

则：$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(ax+by+c)\,dx\,dy = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,f(\lambda t+c)\,dt$.

证：设 $A=\begin{pmatrix}\frac{a}{\lambda} & \frac{b}{\lambda}\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}$ 为正交矩阵. 即 $A^T=A^{-1} \Rightarrow |A|=\pm1$.

作正交变换 $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ 则 $\frac{a}{\lambda}x+\frac{b}{\lambda}y=u \Rightarrow ax+by=\lambda u$

且 $dx\,dy=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|du\,dv=\frac{du\,dv}{\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|}=\frac{du\,dv}{||A||}=\frac{du\,dv}{|\pm1|}=du\,dv$

$u^2+v^2=(u,v)\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=(x,y)A^TA\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(x,y)E\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x^2+y^2\le 1$

从而 $\iint\limits_{x^2+y^2\le1} f(ax+by+c)\,dx\,dy=\iint\limits_{u^2+v^2\le1} f(\lambda u+c)\,du\,dv$

$=\int_{-1}^{1}\left(f(\lambda u+c)\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}}1\,dv\right)du=2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}\,f(\lambda u+c)\,du$

$=2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,f(\lambda t+c)\,dt$，$(\lambda=\sqrt{a^2+b^2}>0)$

（注在ch11综/4、5、6三题中，也有利用正交变换的问题）

例5. 证明：$\iint\limits_{x^2+y^2\le1} e^{x^2+y^2}\,d\sigma<\left(\int_{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} e^{x^2}dx\right)^2=\int_{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}\int_{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$ (5).

证：由奇偶对称性知：$\iint\limits_{x^2+y^2\le1} e^{x^2+y^2}d\sigma=4\iint\limits_{D_{11}} e^{x^2+y^2}d\sigma$,

$\iint\limits_{D_2} e^{x^2+y^2}d\sigma=4\iint\limits_{D_{21}} e^{x^2+y^2}d\sigma$, $D_1: x^2+y^2\le1$, $D_2: \begin{cases}|x|\le\frac{\sqrt{\pi}}{2}\\ |y|\le\frac{\sqrt{\pi}}{2}\end{cases}$,

D_{11}, D_{21} 分别是 D_1, D_2 在第一象限部分. 令 $D_0=D_{11}\cap D_{21}$.

则 $S(D_1)=\pi=S(D_2)\Rightarrow S(D_{11})=S(D_{21})\Rightarrow S(D_{11}-D_0)=S(D_{21}-D_0)$

而 $\iint\limits_{D_{11}-D_0} e^{x^2+y^2}d\sigma<\iint\limits_{D_{11}-D_0} e^{1}d\sigma=eS(D_{11}-D_0)=eS(D_{21}-D_0)=\iint\limits_{D_{21}-D_0} e^{1}d\sigma$

$<\iint\limits_{D_{21}-D_0} e^{x^2+y^2}d\sigma \Leftrightarrow \iint\limits_{D_{11}} e^{x^2+y^2}d\sigma<\iint\limits_{D_{21}} e^{x^2+y^2}d\sigma \Leftrightarrow$

$\iint\limits_{D_1} e^{x^2+y^2}d\sigma<\iint\limits_{D_2} e^{x^2+y^2}d\sigma \Leftrightarrow \iint\limits_{x^2+y^2\le1} e^{x^2+y^2}d\sigma<\left(\int_{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} e^{x^2}dx\right)^2$.

(三)作业：

(1)、用五种方法计算 $\Omega: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le1$ 的体积 $V(\Omega)$.

(2)、计算 $I=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le1}\cos(ax+by+cz)dV$ 与 $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le1}(ax+by+cz)^m dV$

$(a,b,c)\neq0$ 为常向量, $m\in N^*$

(3) ch10 综/5、6、8.