第29讲：Green公式及其应用

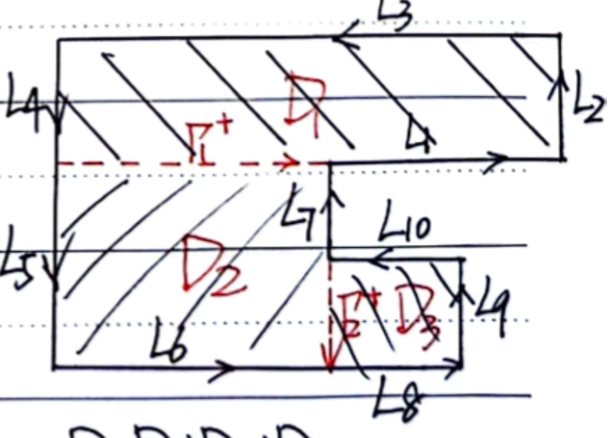
(一) 复习：设D是xoy平面中由分段光滑的曲线L围成的区域，$P(x,y),Q(x,y)\in C^1(D)$ 且 $L=\partial D$ 为正向，则

$$\oint_{\partial D} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy \qquad (*)$$

(1°) 已经证明当D既是上下型又是左右型区域（特别是这种区域为曲边矩形域）时，(*)成立。

(2°) 当D可分解成有限个曲边矩形域时，(*)仍成立。

例如，右图区域D可分解为三个曲边矩形域（首先，作辅助线 Γ_1^+,Γ_2^+，设 $D=D_1+D_2+D_3$），则



$$\begin{cases}\oint_{L_1+L_2+L_3+L_4+\Gamma_1^+} Pdx+Qdy=\iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy\\ \oint_{L_5+L_6+\Gamma_2^-+L_7+\Gamma_1^-} Pdx+Qdy=\iint_{D_2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy\\ \oint_{L_8+L_9+L_{10}+\Gamma_2^+} Pdx+Qdy=\iint_{D_3}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy\end{cases}$$

$D=D_1+D_2+D_3$

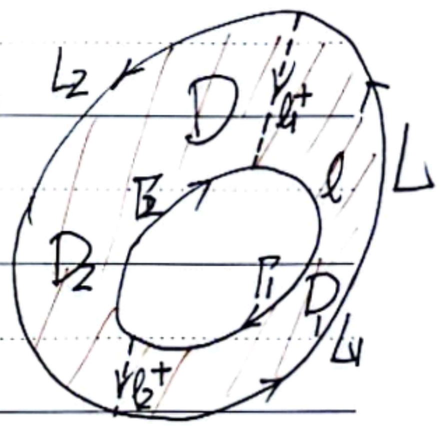
$L_1+L_2+L_3+L_4+L_5+L_6+L_8+L_9+L_{10}+L_7=\partial D$

由积分关于积分区域的可加性，有

$$\oint_{L_1+L_2+L_3+L_4+L_5+L_6+L_7+L_8+L_9+L_{10}} Pdx+Qdy = \iint_{D_1+D_2+D_3}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$，即

$$\oint_{\partial D} Pdx+Qdy = \iint_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

(3) 当 D 是"有洞"区域即多连通区域时，(*)仍成立。



如图 D 是多连通域，作两条有向的辅助线 l_1^+，l_2^+，设 $\partial D_1 = l_2^+ + L_1 + l_1^+ + \Gamma_1$，

$\partial D_2 = l_1^- + L_2 + l_2^- + \Gamma_2$，分别在单连通域

D_1，D_2 上应用 Green 公式：

$$\begin{cases} \oint_{\partial D_1} Pdx+Qdy = \iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy \\ \oint_{\partial D_2} Pdx+Qdy = \iint_{D_2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy \end{cases} \Rightarrow \oint_{\partial D_1+\partial D_2} Pdx+Qdy = \iint_{D_1+D_2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

即 $$\oint_{(L_1+L_2)+(\Gamma_1+\Gamma_2)} Pdx+Qdy = \iint_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint_{\partial D} Pdx+Qdy$$

(二) 例题：

例1.(1) 计算 $I = \oint_L \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$，L 是正向圆周 $x^2+y^2=a^2$ $(a>0)$.

(2). 设 Γ 是任意一条绕 $O(0,0)$ 一周的正向闭光滑曲线，

证明 $\oint_{\Gamma} \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2} = \oint_{x^2+y^2=a^2} \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2} = 2\pi$.（与半径 a 无关）

(3). 设 D 是 xOy 平面中任一个不包含 $O(0,0)$ 的区域（有界或无界皆可）. 证明线积分 $\int_L \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$ 在 D 中与路径无关.

即设 A, B 是 D 中任意两点，L_1^+, L_2^+ 是 D 中从 A 点到 B 点的任两条光滑路径，则证明 $\int_{L_1^+} \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2} = \int_{L_2^+} \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$.

例2. 计算 $I = \int_{L_1} (x^2+y^2)dx + 4xydy$

(1) L 是上半圆周 $x^2+y^2=ax$ $(a>0, y\geq 0)$ 从 $O(0,0)$ 到 $(a,0)$；$\left(\frac{a^3}{6}\right)$

(2) L 是线段 $y=0$, $(0\leq x\leq a)$ 从 $O(0,0)$ 到 $(a,0)$. $\left(\frac{a^3}{3}\right)$

（注：例2中的线积分与路径有关！若设 $\begin{cases} P(x,y)=x^2+y^2 \\ Q(x,y)=4xy \end{cases}$.

则 $P(x,y), Q(x,y) \in C^1(R^2)$ 但 $\frac{\partial Q}{\partial x}=4y \neq \frac{\partial P}{\partial y}=2y$，对 $\forall (x,y)\in R^2$）

例3. 线积分 $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 在 D 中与路径无关的充要条件为：$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$, $\forall (x,y)\in D$, D 是单连通域，$L\subset D$。

证例3: "$\Leftarrow$" 已知 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\forall(x,y)\in D$, 设A, B为D中任意两点, L_1^+, L_2^+ 是从A到B的任意两条路径, D_0是 $L_1^++L_2^-$ 围成的区域. 由Green公式:

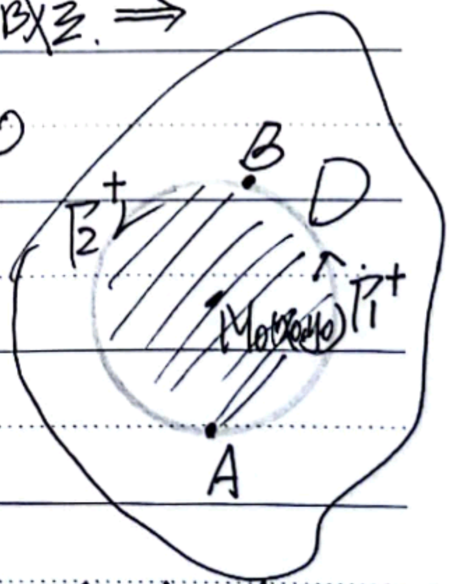
$$\oint_{L_1^++L_2^-} Pdx+Qdy=\iint_{D_0}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint_{D_0}0\,dxdy=0\Rightarrow$$

$\int_{L_1^+}Pdx+Qdy=\int_{L_2^+}Pdx+Qdy$ 即曲线积分 $\int_L Pdx+Qdy$ 与路径无关。充分性得证。

"$\Rightarrow$" 已知 $\int_L Pdx+Qdy$ 与路径无关, 要证 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$, $\forall(x,y)\in D$.

用反证法: 若 $\exists M_0(x_0,y_0)\in D$, 使 $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\Big|_{M_0}>0$, 则由 $P,Q\in C^1(D)$ 知, $\exists\delta>0$ 使 $|MM_0|\le\delta$ 时, $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}>0$ 恒成立. $\Rightarrow$

$$\oint_{x^2+y^2=\delta^2}Pdx+Qdy=\iint_{D_0}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy>0$$



设A, B是正向圆周 $x^2+y^2=\delta^2$ 上任意两点,

则 $\oint_{\Gamma_1^++\Gamma_2^+}Pdx+Qdy>0\Rightarrow\int_{\Gamma_1^+}Pdx+Qdy>$

$-\int_{\Gamma_2^+}Pdx+Qdy=\int_{\Gamma_2^-}Pdx+Qdy$, 曲线积分 $\int_L Pdx+Qdy$ 与路径

L有关，常有！故 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，$\forall (x,y)\in D$ 必要性获证。

当曲线积分 $\int_L Pdx+Qdy$ 在区域D中与路径无关时，称对应的向量场

$\vec{A}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$ 是D中的保守场。

由例1可知，$\vec{A}(x,y)=\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right)$ 在右半平面 D_1：$x>0$；

上半平面 D_2：$y>0$；第一象限 D_3：$\begin{cases}x>0\\y>0\end{cases}$，$D_4$：不含 $O(0,0)$ 的

任何单连通域中都是保守场。（$\because P(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}$，$Q(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$

$\in C^1(D_i)$，$i=1,2,3,4$，且 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$，$\forall (x,y)\in D_i$．$D_i$ 是单连通域）

由例2可知，$\vec{A}(x,y)=(x^2+y^2,4xy)$ 在任何单连通域中都

不是保守场（$\because \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$ 在任何区域中都不成立）

从例1还可知，对任意的连续函数 $g(x)$，$h(y)$，若令 $\begin{cases}P=\frac{-y}{x^2+y^2}+g(x)\\Q=\frac{x}{x^2+y^2}+h(y)\end{cases}$

则仍有 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，$\Rightarrow \vec{A}(x,y)=\left(\frac{-y}{x^2+y^2}+g(x),\frac{x}{x^2+y^2}+h(y)\right)$

仍是上述 D_1,D_2,D_3,D_4 中的保守场。

自作业：$\begin{cases}\text{EX11.3：} & 1(2),(5)；4(3),(4),(5),(6)；6；9.\\\text{EX11.7：} & 5(1)；6(3).\end{cases}$

附：关于Green公式的进一步讨论

(一) 设D是xOy平面中的单连通域，$L=\partial D$为逐段光滑的正向边界曲线，$\vec{A}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))\in C^1(\bar{D})$，则以下四个命题是等价：（课本7.11.7及其推广）

Ⅰ). $\vec{A}(x,y)$是D中的无旋场，即$\nabla\times\vec{A}(x,y)\equiv\theta$，即

$\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv\frac{\partial P}{\partial y}$，$\forall(x,y)\in D$.

Ⅱ) $\vec{A}(x,y)$是D中的保守场，即对D中的任意封闭路径Γ，

$\oint_{\Gamma}P(x,y)dx+Q(x,y)dy\equiv0$，即线积分$\int_{L_{AB}}Pdx+Qdy$在D中与路径无关

从而$\int_{L_{AB}}Pdx+Qdy$可以写成$\int_A^B Pdx+Qdy$.

Ⅲ). $\vec{A}(x,y)$是D中的有势场(即梯度场)，即存在$\varphi(x,y)\in C^1(D)$

使$d(\varphi(x,y))=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 即$\nabla\varphi(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))=\vec{A}(x,y)$

此时，称可微函数$\varphi(x,y)$为$\vec{A}(x,y)$的势(原)函数，且

$$\varphi(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy$$ (公1)

对于D中的任意两点Q_2, Q_1，有$M_0(x_0,y_0)\in D$. 设

$$\int_{Q_1}^{Q_2} P(x,y)dx+Q(x,y)dy = \int_{Q_1}^{M_0} Pdx+Qdy + \int_{M_0}^{Q_2} Pdx+Qdy$$

$$= \int_{M_0}^{Q_2} Pdx+Qdy - \int_{M_0}^{Q_1} Pdx+Qdy = \varphi(Q_2)-\varphi(Q_1) = \int_{Q_1}^{Q_2} d\varphi(x,y).$$ (☆2)

这是Newton-Leibniz公式在平面曲线积分中的推广。

- (IV) 全微分方程(ODE)：$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 是全微分方程

(即恰当方程)，即存在可微函数$\varphi(x,y)$ 使

$$d\varphi(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \Rightarrow \varphi(x,y)\equiv C$$ 为所求通解. (☆3)

证明思路：(I)$\Rightarrow$(II)$\Rightarrow$(III)$\Rightarrow$(IV)$\Rightarrow$(I)

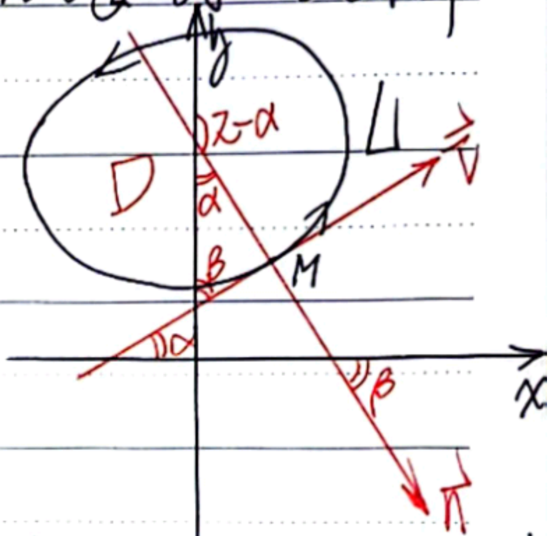
- (三) 第二Green公式及其证明(ex11.3/7)

(1). 设$u(x,y), v(x,y)\in C^2(D)$，D是xOy平面中由简单闭曲线L围成的区域，$\vec{n}$是L的外法单位向量，$\nabla=(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$，$\Delta=\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$，

则 $$\oint_L u\frac{\partial v}{\partial n}ds = \iint_D (\nabla u\cdot\nabla v + u\Delta v)dxdy$$ (☆4)

- (2) $$\oint_L \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds = \iint_D (u\Delta v - v\Delta u)dxdy$$ (☆5)

这里的(式5)即为第二Green公式，今后在数学物理方程中会用到。



证(1)：设 $\vec{\tau}=(\cos\alpha,\cos\beta)$ 是L上过点M的单位切向量，则L上过M点的单位外法向量 $\vec{n}=(\cos\beta,\cos(\pi-\alpha))=(\cos\beta,-\cos\alpha)$

$L: r(t)=(x(t),y(t))\in C^1$

且从 $\vec{\tau}=(\cos\alpha,\cos\beta)=\dfrac{r'(t)}{|r'(t)|}=\dfrac{r'(t)dt}{|r'(t)|dt}=\dfrac{(dx,dy)}{ds}=\left(\dfrac{dx}{ds},\dfrac{dy}{ds}\right)\Rightarrow$

$$\cos\alpha\, ds=dx,\ \cos\beta\, ds=dy.$$

而 $\oint_L u\dfrac{\partial v}{\partial n}ds=\oint_L u\nabla v\cdot\vec{n}\,ds=\oint_L u\nabla v\cdot(\cos\beta,-\cos\alpha)ds$

$$=\oint_L u(v'_x,v'_y)\cdot(dy,-dx)=\oint_L(-uv'_y)dx+(uv'_x)dy\overset{\text{Green}}{=\!=\!=}$$

$$\iint_D\left(\frac{\partial(uv'_x)}{\partial x}-\frac{\partial(-uv'_y)}{\partial y}\right)dxdy=\iint_D[u'_xv'_x+u'_yv'_y+u(v''_{xx}+v''_{yy})]dxdy$$

$$=\iint_D[(u'_x,u'_y)\cdot(v'_x,v'_y)+u\Delta v]dxdy=\iint_D(\nabla u\cdot\nabla v+u\Delta v)dxdy \quad (*1)$$

证(2)：同理有 $\oint_L v\dfrac{\partial u}{\partial n}ds=\iint_D(\nabla v\cdot\nabla u+v\Delta u)dxdy \quad (*2)$

$(*1)-(*2)$：$\oint_L\left(u\dfrac{\partial v}{\partial n}-v\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)ds=\iint_D(u\Delta v-v\Delta u)dxdy$

(3)、

注(1)：在(1)中，因为 $\vec{A}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$ 的旋度为 $\nabla\times\vec{A}(x,y)=$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(x,y) & Q(x,y) & 0 \end{vmatrix}=0\vec{i}+0\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}\equiv 0=(0,0,0)\Leftrightarrow\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

因此，$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，即表示 $\vec{A}(x,y)$ 为D中的无旋场。

注(2) 在ODE：$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 中，若 $P(x,y),Q(x,y)$ 在单连通区域D中满足 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，则 $\exists\, \varphi(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy$ 为已知向量场 $\vec{A}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$ 的势函数，则ODE的通解为 $\varphi(x,y)=C$（C是任意常数）

注(3)，若曲线积分 $\int_{L_{AB}}Pdx+Qdy$ 中的 P,Q 在单连通区域D中满足 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，则 $\exists\,\varphi(x,y)\in C^1$，使 $\int_{L_{AB}}Pdx+Qdy=\int_A^B d\varphi(x,y)$ $=\varphi(B)-\varphi(A)$. 其中 $\varphi(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy$

x_0,y_0 选简单，越好，例如选 $x_0=0=y_0$，尽量选 $x_0=y_0=0$.

~~作业：EX11.7/ 3(1)；5(2)；6(1),(3)；9；12；14.~~

例题：计算 $\int_{(1,1)}^{(2,3)}\frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy$ （答案：$\frac{\pi}{4}-\arctan 2+\arctan\frac{3}{2}-\arctan\frac{1}{\ }$[illegible]