第27讲：第一类曲线、曲面积分的计算与证明

(一) 证明题：(线面积分的奇偶对称性)

(1). 设 $f(x,y)$ 在光滑曲线弧 L 上连续，且关于 y 是奇(偶)函数，

当 L 关于 $y=0$ 的坐标轴对称，则

$$\int_L f(x,y)ds=\begin{cases}0, & 当 f(x,-y)\equiv -f(x,y)\\ 2\int_{L_1} f(x,y)ds, & 当 f(x,-y)\equiv f(x,y).\end{cases}$$

其中，L_1 是 L 在 $y>0$ (<0) 部分。

(2). 设 $f(x,y,z)$ 在光滑曲线弧 L 上连续，f 关于 z 是奇(偶)

函数，且 L 关于 $z=0$ 的坐标面对称，则

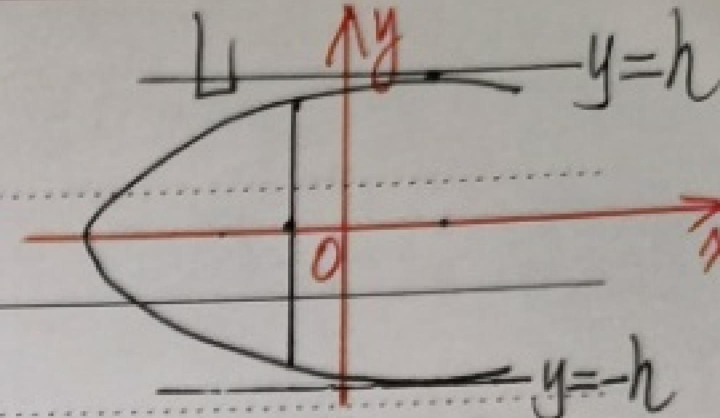
$$\int_L f(x,y,z)ds=\begin{cases}0, & 当 f(x,y,-z)\equiv -f(x,y,z).\\ 2\int_{L_1} f(x,y,z)ds, & 当 f(x,y,-z)\equiv f(x,y,z).\end{cases}$$

其中，L_1 是 L 在 $z>0$ (<0) 的部分。

(3) 设 $f(x,y,z)$ 在光滑曲面 Σ 上连续，f 关于 z 是奇(偶)

函数，且 Σ 关于 $z=0$ 的坐标面对称，则

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)ds=\begin{cases}0, & 当 f(x,y,-z)\equiv -f(x,y,z)\\ 2\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)ds, & 当 f(x,y,-z)\equiv f(x,y,z),\end{cases} \quad ①.$$



其中，Σ_1是Σ在$z>0(<0)$的部分。

论(1)：设L为 $x=\varphi(y)\in C^1[-h,h]$. 则 $ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=$

$\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+1}\,dy=\sqrt{\varphi'^2(y)+1}\,dy \Rightarrow I=\int_L f(x,y)ds=\int_{-h}^{h} f(\varphi(y),y)\sqrt{\varphi'^2(y)+1}\,dy$

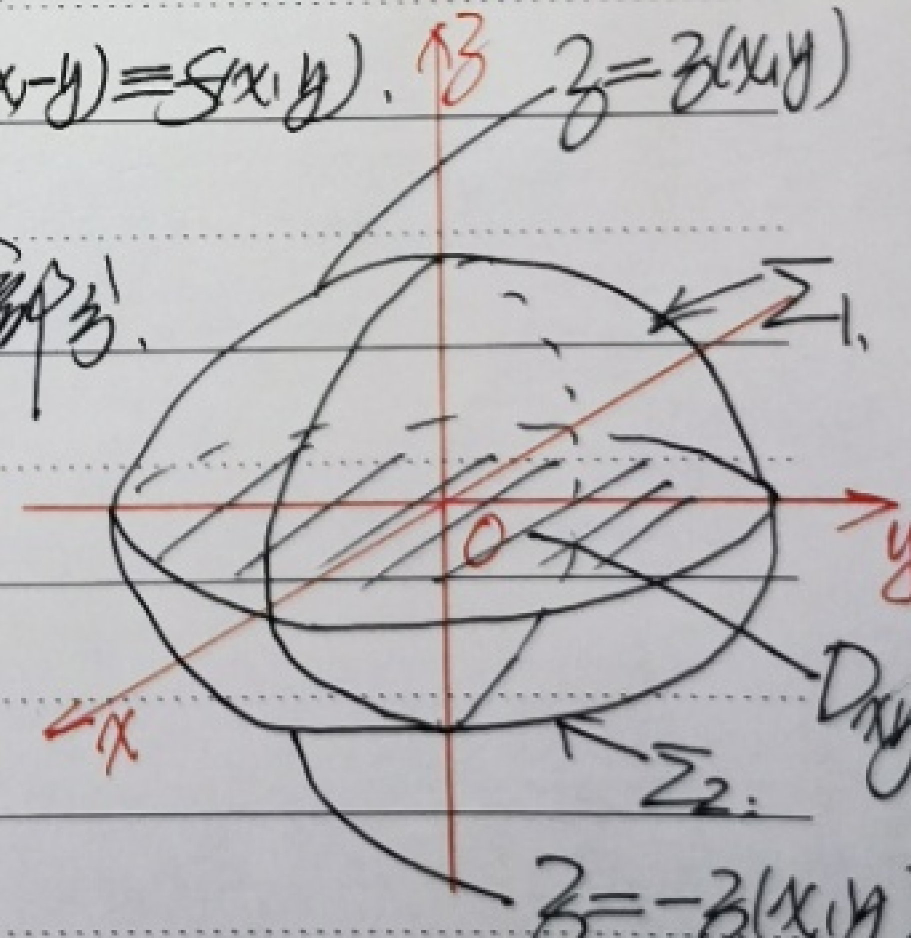
$=\int_{-h}^{0} f(\varphi(y),y)\sqrt{\varphi'^2(y)+1}\,dy+\int_{0}^{h} f(\varphi(y),y)\sqrt{\varphi'^2(y)+1}\,dy$

而 $\int_{-h}^{0} f(\varphi(y),y)\sqrt{\varphi'^2(y)+1}\,dy \xlongequal{\text{令}y=-v} \int_{h}^{0} f(\varphi(-v),-v)\sqrt{(\varphi'(-v))^2+1}\,(-dv)$

$\xlongequal{\because \varphi(-y)=\varphi(y),\ f(x,-y)=-f(x,y)} \int_{0}^{h} f(\varphi(v),v)\sqrt{\varphi'^2(v)+1}\,dv$

$=-\int_{0}^{h} f(\varphi(y),y)\sqrt{\varphi'^2(y)+1}\,dy.$

$\therefore I=\int_L f(x,y)ds=\begin{cases}0, & \text{若} f(x,-y)\equiv -f(x,y)\\ 2\int_{L_1} f(x,y)ds, & \text{若} f(x,-y)\equiv f(x,y).\end{cases}$



论(3)：设$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$，Σ_1是Σ在$z\geq 0$部分.

且Σ_1方程为$z=z(x,y)\in C^1(D_{xy})$.

Σ_2是$z<0$部分，Σ_2的方程为

$z=-z(x,y)\in C^1(D_{xy})$. 则

$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)dS+\iint_{\Sigma_2} f(x,y,z)dS.$

一代二换三投影

而 $\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)dS \xlongequal{\quad} \iint\limits_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy$

$\iint\limits_{\Sigma_2} f(x,y,z)dS \xlongequal{\text{同上}} \iint\limits_{D_{xy}} f(x,y,-z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy$

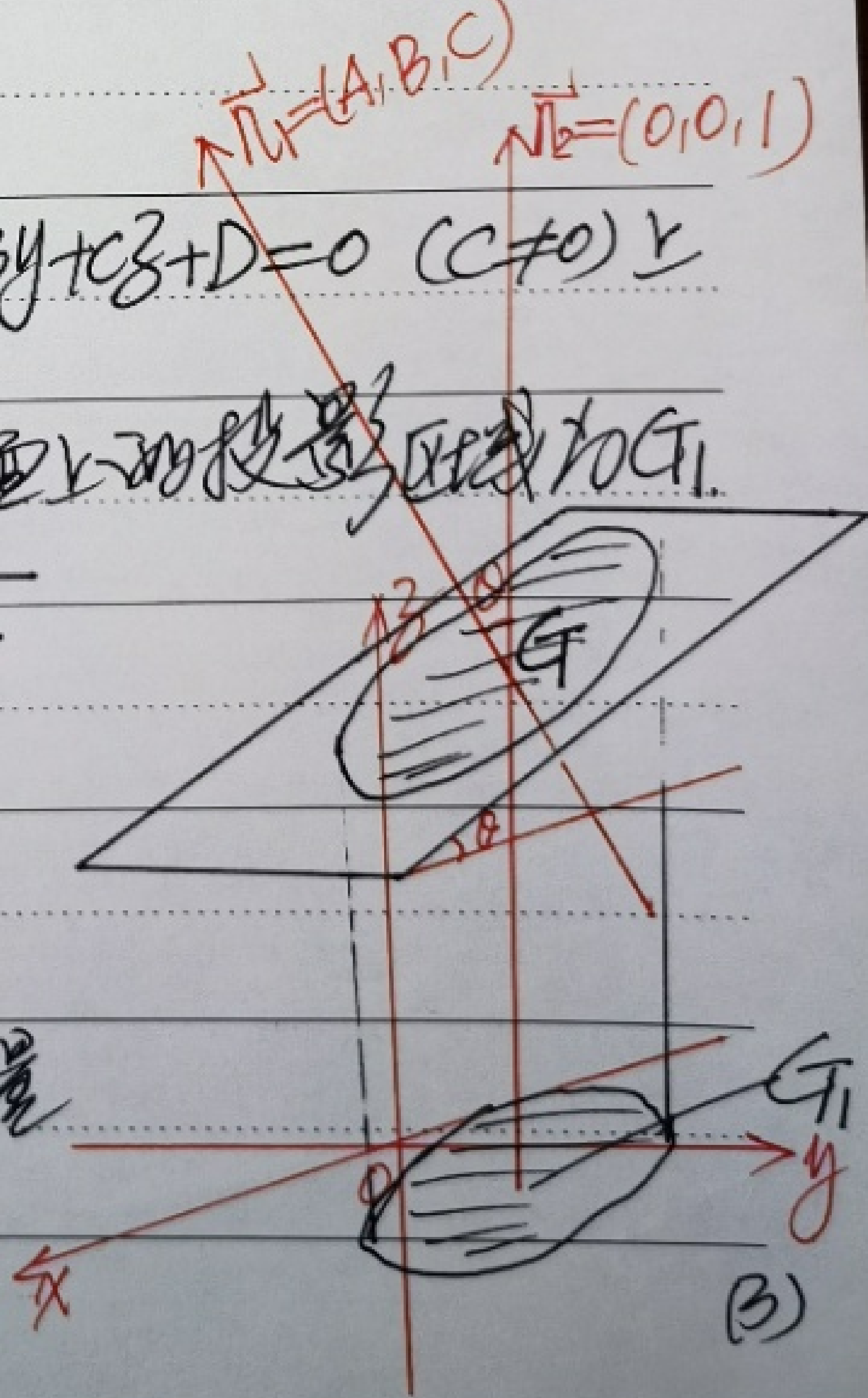
$= \iint\limits_{D_{xy}} [-f(x,y,z(x,y))]\sqrt{z_x'^2+z_y'^2+1}\,dxdy$

故 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS \xlongequal{\text{当}f(x,y,-z)\equiv -f(x,y,z)\text{时}} \iint\limits_{D_{xy}} [f(x,y,z(x,y))-f(x,y,z(x,y))]$

$\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy = 0$.

注：当 $f(-x,y,z)\equiv -f(x,y,z)$ 且 Σ 关于 $x=0$ 的坐标面对称时，同样

有 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=0$ 余类推。



(三)(P.X11.12/4). 设 G 是平面 π: $Ax+By+Cz+D=0$ $(C\neq 0)$ 上的一块有界闭区域，G 在 xoy 平面上的投影区域为 G_1.

证明：$\dfrac{S(G)}{S(G_1)}=\sqrt{\dfrac{A^2+B^2+C^2}{C}}$

证：平面 G 与平面 G_1 的夹角 θ，即为

G 的法向量 $\vec{n_1}=(A,B,C)$ 与 G_1 的法向量

$\vec{n_2}=(0,0,1)$ 的夹角 $(\widehat{\vec{n_1},\vec{n_2}})$.

而 $\cos(\vec{n_1},\vec{n_2})=\dfrac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}=\dfrac{(A,B,C)\cdot(0,0,1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot 1}=\dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\cos\theta$.

且 $S(G_1)=S(G)|\cos\theta|=S(G)\dfrac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

故 $\dfrac{S(G)}{S(G_1)}=\sqrt{\dfrac{A^2+B^2+C^2}{C^2}}$

注：$\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=a^2} f(a_1x+b_1y+c_1z)\,ds$ 题型，否用旋转换！

(三) 计算下列曲线、曲面积分 I

(1). $\displaystyle\oiint\limits_{\Sigma}\frac{\sqrt{|x|}+y}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}+\sqrt{|z|}}\,ds$，$\Sigma$：$x^2+y^2+z^2=a^2$ ($a>0$，常数).

(2). $\displaystyle\int_L x\,ds$，L 为以 $O(0,0)$，$A(1,0)$，$B(0,1)$ 为顶点的 $\triangle$ 边界；

(3). $\displaystyle\int_L x\sqrt{x^2-y^2}\,ds$，L 为双纽线：$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 且 $x\geq 0$.

(4). 求曲线 L：$\begin{cases}4ax=(y+z)^2\\4x^2+3y^2=3z^2\end{cases}$ 从 $O(0,0,0)$ 到 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的弧长；($a>0$，$z_0>0$)

(5). 计算曲面 Σ：$(x^2+y^2+z^2)^2=2a^2xy$ 的面积 $S(\Sigma)$.

(6) 求函数 $f(x,y,z)=x+y+z$ 在 Σ 上的平均值 $\bar{f}$，其中，Σ 是立方体 Ω：$\begin{cases}0\leq x\leq 1\\0\leq y\leq 1\\0\leq z\leq 1\end{cases}$ 的全表面；

(7) 计算 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)\,ds$，$\Sigma$ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面：$x^2+y^2=2ax$ ($a>0$)

截下部分.

(8). 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(ax+by+cy^2+|xyz|)dS$, Σ是$z=\sqrt{x^2+y^2}$被$z=1$

截下部分. (a, b, c是常数)

解(1). $\because \dfrac{y}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}+\sqrt{|z|}}$ 关于y是奇函数, 且$\Sigma: x^2+y^2+z^2=a^2$关于

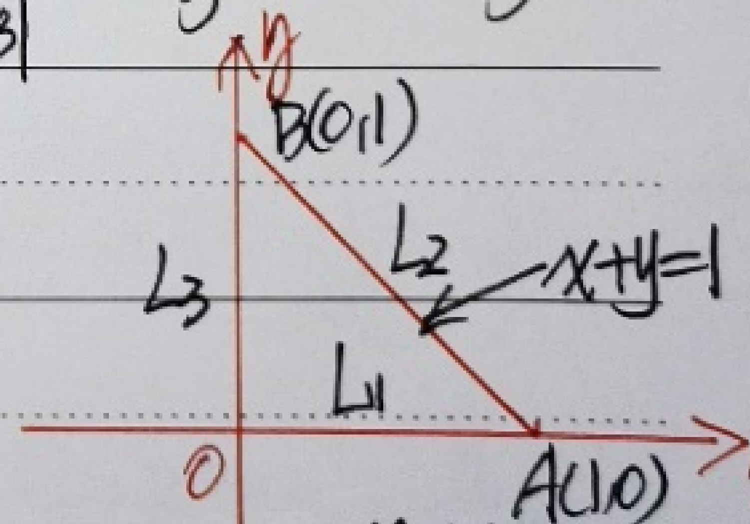
$y=0$的坐标面对称, $\therefore \oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{y}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}+\sqrt{|z|}}dS=0$.

又$(x,y,z)\to(y,z,x)\to(z,x,y)$时, Σ不变, 因此, $\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{\sqrt{|x|}dS}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}+\sqrt{|z|}}$

$=\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{\sqrt{|y|}dS}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}+\sqrt{|z|}}=\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{\sqrt{|z|}dS}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}+\sqrt{|z|}}=\dfrac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{(\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}+\sqrt{|z|})dS}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}+\sqrt{|z|}}$

$=\dfrac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma}1dS=\dfrac{1}{3}S(\Sigma)=\dfrac{1}{3}4\pi a^2$.

从而 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{\sqrt{|x|}dS}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}+\sqrt{|z|}}+\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{ydS}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}+\sqrt{|z|}}=\dfrac{4}{3}\pi a^2+0=\dfrac{4}{3}\pi a^2$.



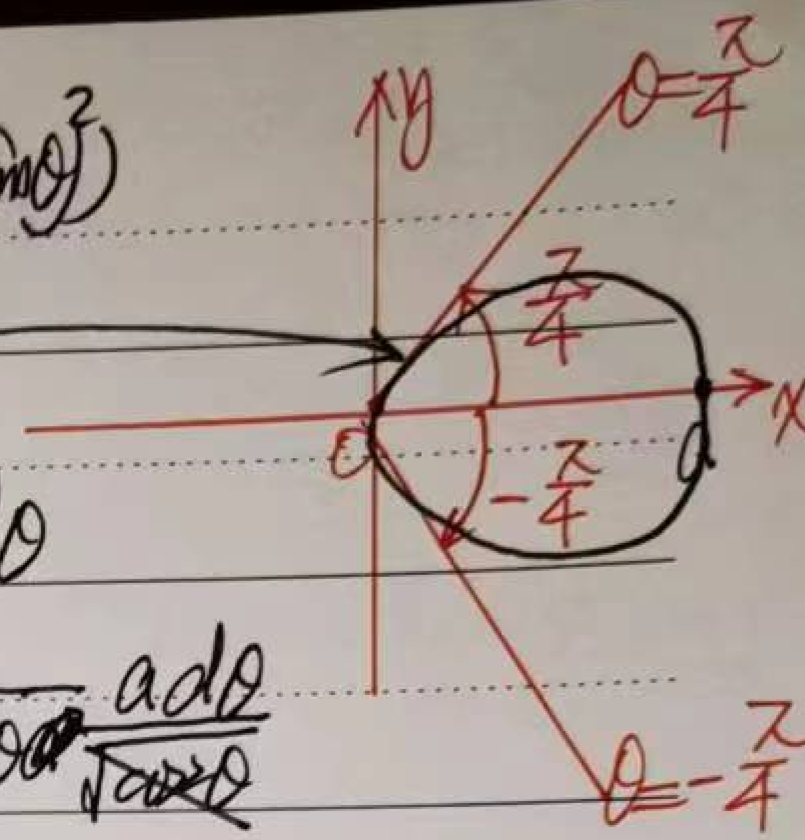
解(2) 设$L=L_1+L_2+L_3=\overline{OA}+\overline{AB}+\overline{BO}$

则 $\oint_L x\,ds=\int_{OA}x\,ds+\int_{AB}x\,ds+\int_{BO}x\,ds$ 且

$\int_{OA}x\,ds\xlongequal[\ y=0\ ]{L_1:\ x=x\in[0,1]}\int_0^1 x\sqrt{1+0^2}\,dx=\dfrac{1}{2}$; $\int_{AB}x\,ds\xlongequal[ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{(dy)^2+(dy)^2}]{L_2:\ \begin{cases}x=1-y\\ y=y\end{cases}}$

$\int_0^1(1-y)\sqrt{2}\,dy=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\int_{BO}x\,ds\xlongequal[ds=\sqrt{1+0}\,dy]{\begin{cases}x=0\\ y=y\end{cases}}\int_0^1 0\,dy=0$,

故 $I=\oint_L x\,ds=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$.



解(3)、令 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ 则 $(r^2)^2 = a^2((r\cos\theta)^2 - (r\sin\theta)^2)$

$\Rightarrow r^2 = a^2\cos 2\theta \Rightarrow r(\theta) = a\sqrt{\cos 2\theta}$

$x = r(\theta)\cos\theta = a\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta$, $ds = \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\, d\theta$

$= \frac{a\, d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} \Rightarrow I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a\cancel{\sqrt{\cos 2\theta}}\cos\theta \sqrt{r^2(\theta)\cos 2\theta}\, \frac{a\, d\theta}{\cancel{\sqrt{\cos 2\theta}}}$

$= a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta\sqrt{a^2\cos 2\theta\cos 2\theta}\, d\theta = a^3\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta(1-2\sin^2\theta)\, d\theta = \frac{2}{3}\sqrt{2}a^3.$

解(4)：设 $y+z=t$，则 $x = \frac{t^2}{4a}$，从 $3(z-y)(z+y) = 4x^2 = 4\cdot\left(\frac{t^2}{4a}\right)^2$

即 $3(z-y)t = \frac{t^4}{4a^2} \Rightarrow \begin{cases} z-y = \frac{t^3}{12a^2} \\ z+y = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t^2/4a \\ y = \frac{t}{2} - t^3/24a^2 \\ z = \frac{t}{2} + t^3/24a^2 \end{cases}$，$t\in[0,t_0]$.

t_0与M_0对应.

$s(L) = \int_L 1\, ds = \int_0^{t_0} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\, dt = \int_0^{t_0}\sqrt{\frac{1}{32a^4}(16a^4 + 8a^2t^2 + t^4)}\, dt$

$= \frac{1}{4\sqrt{2}a^2}\int_0^{t_0}(4a^2+t^2)\, dt = \frac{1}{4\sqrt{2}a^2}(4a^2t_0 + \frac{1}{3}t_0^3)$

$= \sqrt{2}\left(\frac{t_0}{2} + \frac{t_0^3}{24a^2}\right) = \sqrt{2}z_0$

解(5)：从 $\Sigma: (x^2+y^2+z^2)^2 = 2a^2xy \geq 0 \Rightarrow x$与$y$同号知$\Sigma$

仅在一、五、~~四~~三、七卦限中有图像，且以$-z$代z时，Σ不变

以$-x, -y$代x, y时，Σ也不变，故$S(\Sigma) = 4S(\Sigma_1)$，其中

Σ_1是Σ位于第一卦限部分．令$\begin{cases} x=r_1\sin\theta\cos\varphi \\ y=r_1\sin\theta\sin\varphi, & \theta\in[0,\frac{\pi}{2}] \\ z=r_1\cos\theta, & \varphi\in[0,\frac{\pi}{2}], \end{cases}$

代入Σ的方程得：$(r_1^2)^2=2a^2(r_1\sin\theta\cos\varphi)(r_1\sin\theta\sin\varphi)\Rightarrow$

$r_1(\theta,\varphi)=a\sin\theta\sqrt{\sin2\varphi}$，于是有：$\begin{cases} x(\theta,\varphi)=a\sin\theta\sqrt{\sin2\varphi}\sin\theta\cos\varphi \\ y(\theta,\varphi)=a\sin\theta\sqrt{\sin2\varphi}\sin\theta\sin\varphi \Rightarrow \\ z(\theta,\varphi)=a\sin\theta\sqrt{\sin2\varphi}\cos\theta. \end{cases}$

$$ds=\sqrt{EG-F^2}d\theta d\varphi=\sqrt{(x_\theta'^2+y_\theta'^2+z_\theta'^2)(x_\varphi'^2+y_\varphi'^2+z_\varphi'^2)-[(x_\theta',y_\theta',z_\theta')\cdot(x_\varphi',y_\varphi',z_\varphi')]^2}d\theta d\varphi$$

$$=\sqrt{|r_\theta'|^2\cdot|r_\varphi'|^2-(r_\theta'\cdot r_\varphi')^2}d\theta d\varphi=\sqrt{a^4\sin^4\theta}\,d\theta d\varphi=a^2\sin^2\theta d\theta d\varphi$$

其中，$r(\theta,\varphi)=(x(\theta,\varphi),y(\theta,\varphi),z(\theta,\varphi))$

故$S(\Sigma)=4\iint\limits_{\Sigma_1}1ds=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}4a^2\sin^2\theta d\theta=4a^2\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2a^2}{2}$.

解(b)：$\bar{f}=\oiint\limits_{\Sigma}fds/S(\Sigma)$，且$S(\Sigma)=6\times1^2=6$，而

$$\oiint\limits_{\Sigma}fds=\iint\limits_{\Sigma_1}(x+y+z)ds+\iint\limits_{\Sigma_2}(x+y+z)ds+\iint\limits_{\Sigma_3}(x+y+z)ds+\iint\limits_{\Sigma_4}(x+y+z)ds+\iint\limits_{\Sigma_5}(x+y+z)ds+$$

$\iint\limits_{\Sigma_6}(x+y+z)ds$．其中，$\Sigma_1: y\equiv0,\ 0\le x,z\le1$；$\Sigma_2: z\equiv0,\ 0\le x,y\le1$；

$\Sigma_3: x\equiv0,\ 0\le y,z\le1$；$\Sigma_4: y\equiv1,\ 0\le x,z\le1$，$\Sigma_5: z\equiv1,\ 0\le x,y\le1$；

$\Sigma_6: x\equiv1,\ 0\le y,z\le1$．且在$\Sigma_1$上，有$\begin{cases} x=x \\ y=0x+0z \\ z=z \end{cases}\Rightarrow ds=\sqrt{1+y_x'^2+y_z'^2}dxdz$

$=\sqrt{1+0+0}dxdz=dxdz$，同理，在Σ_4上也有$ds=dxdz$．在Σ_2上，$ds=dxdy$，

在Σ_5上, $dS=dxdy$, 在Σ_3与Σ_6上, $dS=dydz$. $\Rightarrow$

$\iint\limits_{\Sigma_1}(x+y+z)dS \xlongequal[0\le x,z\le 1]{y=0} \int_0^1\int_0^1(x+0+z)dxdz=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1=\iint\limits_{\Sigma_2}(x+y+z)dS=$

$\iint\limits_{\Sigma_3}(x+y+z)dS$ 且 $\iint\limits_{\Sigma_4}(x+y+z)dS=\int_0^1\int_0^1(x+1+z)dxdz=1+1=2=\iint\limits_{\Sigma_5}(x+y+z)dS$

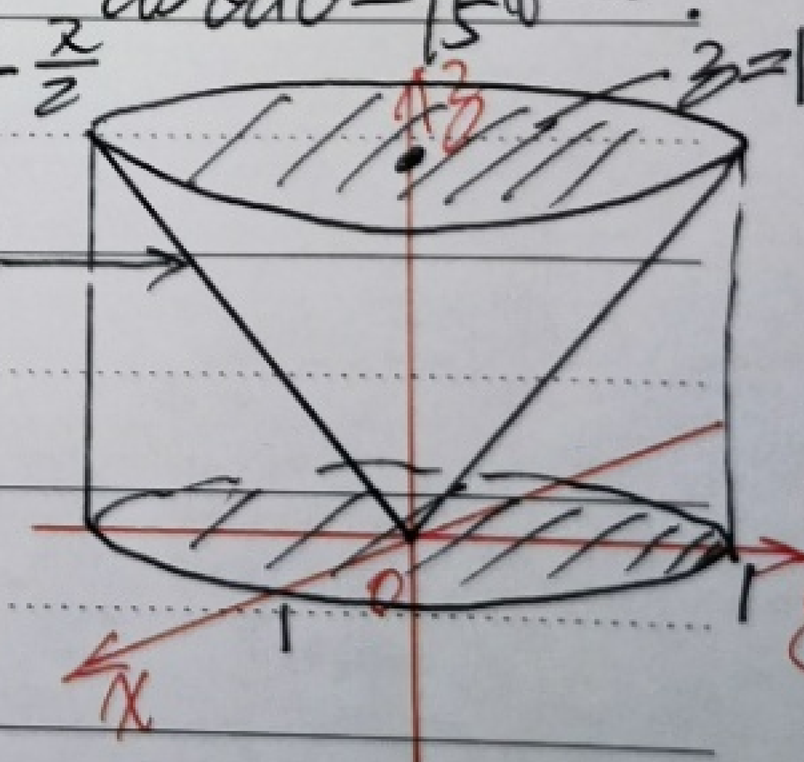
$=\iint\limits_{\Sigma_6}(x+y+z)dS$, 故 $I\triangleq\oiint\limits_{\Sigma} f\,dS=1\times3+2\times3=9$, $\bar{f}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$.

解(7): 因 $xy+yz=(x+z)y$ 关于y是奇函数, 且Σ关于$y=0$两边对称, 所以 $\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz)dS=0$; 而在 $\iint\limits_{\Sigma}xz\,dS$中,

Σ: $z=\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}\,dxdy=\sqrt{2}\,dxdy$

$I=\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz)dS+\iint\limits_{\Sigma}xz\,dS=0+\iint\limits_{x^2+y^2\le 2ax}x\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2}\,dxdy \xlongequal[y=r\sin\theta]{x=r\cos\theta}$

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}(r\cos\theta)\,r\sqrt{2}\,r\,dr=4\sqrt{2}a^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\,d\theta=\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4$.



解(8): (1°) 因函数 ax 关于x是奇函数, 且Σ关于$x=0$两边对称.

故 $\iint\limits_{\Sigma}ax\,dS=0$, 同理 $\iint\limits_{\Sigma}by\,dS=0$.

(2). 因 $cy^2+|xyz|$ 关于 x 及 y 都是偶函数，且 Σ 关于 $x=0$ 的坐标面及 $y=0$ 的坐标面都对称，于是有

$$\iint_{\Sigma}(cy^2+|xyz|)dS=4\iint_{\Sigma_1}(cy^2+|xyz|)dS$$，Σ_1 是 Σ 在第一卦限部分。因此，$|xyz|=xyz$，$z=\sqrt{x^2+y^2}\geq 0 \Rightarrow$

$\Sigma_1: z=\sqrt{x^2+y^2}$，$x^2+y^2\leq 1$，$x\geq 0, y\geq 0 \Rightarrow dS=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy$

$$=\sqrt{1+(\frac{x}{z})^2+(\frac{y}{z})^2}\,dxdy=\sqrt{2}\,dxdy \Rightarrow$$

$$\iint_{\Sigma_1}(cy^2+|xyz|)dS \xlongequal[x^2+y^2\leq 1]{z=\sqrt{x^2+y^2}} \sqrt{2}\iint_{\substack{x^2+y^2\leq 1\\ x\geq 0,\, y\geq 0}}(cy^2+xy\sqrt{x^2+y^2})dxdy \xlongequal[y=r\sin\theta]{x=r\cos\theta}$$

$$\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^1[c(r\sin\theta)^2+(r\cos\theta)(r\sin\theta)r]rdr\right)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{c}{4}\sin^2\theta+\frac{1}{5}\sin\theta\cos\theta\right)\sqrt{2}\,d\theta$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{c}{4}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}\right)$$ 即

$$I=\iint_{\Sigma}ax\,dS+\iint_{\Sigma}by\,dS+\iint_{\Sigma}(cy^2+|xyz|)dS=0+0+4\sqrt{2}\left(\frac{\pi c}{16}+\frac{1}{10}\right)$$

四、作业：

$$\begin{cases} \text{ex11.1: } 1(5);\ 2(2),(6),(8);\ 5; \\ \text{ex11.2: } 1(5);\ 2(1),(5),(6);\ 5. \end{cases}$$