第21讲：三重积分的概念、性质与计算

(一) 概念：设 Ω 是 R^3 中的有界闭区域，函数 $u=f(x,y,z)$ 定义在 Ω 上，且 f 有界。(可将 $f(x,y,z)$ 理解为物体 Ω 的体密度)

(I). 分割 Ω：$\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup\cdots\cup\Omega_i\cup\cdots\cup\Omega_n$，且设 Ω_i 体积为 ΔV_i，直径为 d_i，$i=1,2,3,\cdots,n$，$\lambda=\max\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$.

(II). 近似：在 Ω_i 中任取点 (ξ_i,η_i,ζ_i)，作积：$f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\Delta V_i$.

(III). 求和：$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i$ (物体 Ω 总质量 M 的近似值)

(IV). 极限：若 $\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i$ 存在且唯一，换言之，此极限值与 Ω 的分法及 (ξ_i,η_i,ζ_i) 的取法均无关，则称此极限值是三元函数 $f(x,y,z)$ 在区域 Ω 上的三重积分 (triple integral)，记作

$$\iiint_{\Omega}f(x,y,z)dV=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i\triangleq\int_{\Omega}f \qquad (\star1).$$

此时，称 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上是 Riemann 可积的，记作 $f\in R(\Omega)$.

注(1). 因三重积分 $\iiint_{\Omega}f(x,y,z)dV$ 与二重积分 $\iint_{D}f(x,y)d\sigma$ 的定义类似，所以有：

(1°). f 在 Ω 上或 f 在 D 上 Riemann 可积的必要条件为：f 在 Ω 或 D 上有界；

(2°). f 在 Ω 上或 f 在 D 上 Riemann 可积的充分条件为：$f\in C(\Omega)$ 或 $f\in C(D)$；

(3°). f 在 Ω 上或 f 在 D 上 Riemann 可积的充要条件为：$\lim_{\lambda\to0}(\overline{S}(T)-\underline{S}(T))=0$.

(1).

上述的 (1°), (2°), (3°) 可推广到 n 重积分 ($\forall n\geq2, n\in N^*$).

注(2)：因为三重积分与二重积分的定义方式相同，故三重积分也有与二重积分类似的十大性质。

(二) 三重积分 $\iiint_\Omega f(x,y,z)dV$ 的主要性质：(设 $f,g\in R(\Omega)$)

(1)、$\iiint_\Omega (c_1 f(x,y,z)+c_2 g(x,y,z))dV = c_1\iiint_\Omega f dV + c_2\iiint_\Omega g dV$，(线性性质)

(2)、$\iiint_{\Omega_1\cup\Omega_2} f dV = \iiint_{\Omega_1} f dV+\iiint_{\Omega_2} f dV$，(关于积分区域的可加性)

(3)、若 $f(x,y,z)\ge g(x,y,z)$，$\forall (x,y,z)\in\Omega$，则 $\iiint_\Omega f dV\ge\iiint_\Omega g dV$，(保序性)

(4)、若 f 在有界闭区域 Ω 中连续，则有三重积分的中值定理。

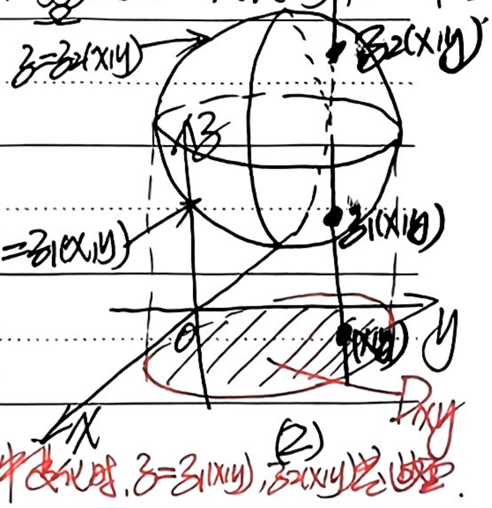
$\iiint_\Omega f(x,y,z)dV = f(M_0)V(\Omega)$，$M_0\in\Omega$。此时，称 $f(M_0)=\iiint_\Omega f(x,y,z)dV \Big/ V(\Omega)$ 为 f 在 Ω 中取值的积分平均值。

(5)、$\iiint_\Omega 1\, dV = V(\Omega)$：$\Omega$ 的体积 $\Rightarrow \iiint_\Omega k\, dV = kV(\Omega)$，($k$为常数)

(6)、$\left|\iiint_\Omega f(x,y,z)dV\right| \le \iiint_\Omega |f(x,y,z)|dV$

(三)、三重积分的计算方法：

(1)、若 Ω 由 $\begin{cases} z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y) \\ (x,y)\in D_{xy} \end{cases}$ 组成

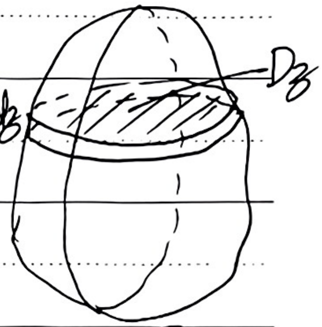


$(x,y)\in D_{xy}$ 中而固定时，是一点，$(x,y)\in D_{xy}$ 中变化时，$z=z_1(x,y)$，$z_2(x,y)$ 是曲面。

则 $I=\iiint_\Omega f(x,y,z)dV=\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz=\iint_{D_{xy}}\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dxdy$

此法称为"先一后二"法，若 D_{xy} 为 $\begin{cases} g_1(x)\le y\le g_2(x) \\ a\le x\le b\end{cases}$，则

$$I=\int_a^b\left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)}\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dy\right)dx=\int_a^b dx\int_{g_1(x)}^{g_2(x)}dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$



(2) 若Ω在z固定时，截面为 D_z，$z\in[c,d]$，

则 $I=\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz=\int_c^d\left(\iint_{D_z} f(x,y,z)dxdy\right)dz$

此法称之为"先二后一"法，尤其是 $f(x,y,z)=g(z)$ 时，

特别适合用此法：$I=\int_c^d\left(\iint_{D_z} g(z)dxdy\right)dz=\int_c^d g(z)S(D_z)dz$

$S(D_z)=\iint_{D_z}1dxdy$ 是 D_z 的面积。

(3). 柱坐标变换法：令 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z\end{cases}$ 则 $dxdydz=\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right|drd\theta dz$

$=rdrd\theta dz\Rightarrow I=\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz=\iiint_{\Omega_1} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta dz$

(4). 球坐标变换法：令 $\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi \\ y=r\sin\theta\sin\varphi \\ z=r\cos\theta\end{cases}\Rightarrow dxdydz=\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}\right|drd\theta d\varphi$

$=r^2\sin\theta drd\theta d\varphi\Rightarrow\iiint_\Omega f(x,y,z)dV=\iiint_{\Omega_1} f(r\sin\theta\cos\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\theta)r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$

(3).

(四)例题：

例1. 证明：$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1} f(z)dV=\pi\int_{-1}^{1}f(z)(1-z^2)dz$，其中 $f\in C$.

例2. 设 $F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f(x^2+y^2+z^2)dxdydz$ 且 $f\in C^1$，求 $F'(t)$.

例3. 用各种方法求椭球体 $\Omega:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$ 的体积 $V(\Omega)$.

证例3解法(一)：用广义球坐标变换 $\begin{cases}x=ar\sin\theta\cos\varphi\\ y=br\sin\theta\sin\varphi\\ z=cr\cos\theta\end{cases}$，$\begin{cases}0\le r\le 1\\ 0\le\theta\le\pi\\ 0\le\varphi\le 2\pi\end{cases}$

$dxdydz=\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}\right|drd\theta d\varphi=abcr^2\sin\theta drd\theta d\varphi$.

$V(\Omega)=\iiint\limits_{\Omega}1dV=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1}abcr^2\sin\theta drd\theta d\varphi=\frac{4}{3}\pi abc$.

解法(二)："先一后二"法. $V(\Omega)=\iint\limits_{D_{xy}}\left(\int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}1dz\right)dxdy$

$=2\iint\limits_{D_{xy}}c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy$，$D_{xy}:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$.

解法(三)："先二后一"法：$V(\Omega)=\int_{-c}^{c}dz\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{z^2}{c^2}}1dxdy=\int_{-c}^{c}S(D_z)dz$

$=\int_{-c}^{c}\pi ab(1-\frac{z^2}{c^2})dz=\frac{4}{3}\pi abc$.

(五)作业：EX10.3　1/(1),(2)；2/(1),(2),(3)；3/(1),(3),(6)，7；8.

(六).本周五第4节课将举行第二次"随堂测验"。
希望全体同学都参加！