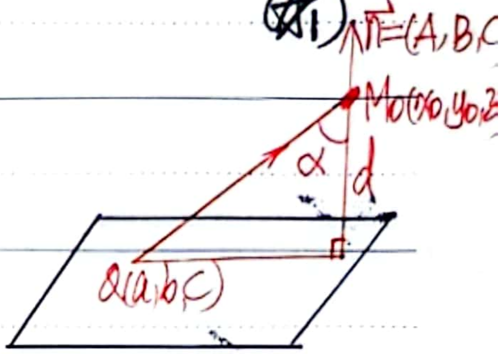
第3讲：向量、平面、直线习题课

(一)/(1). 证明：点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 π：$Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为：$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

(如图1)



证，在 π 平面上任取点 $Q(a,b,c)$，则

$$d=\left|\,|\overrightarrow{QM_0}|\cos\alpha\,\right|=\left|\frac{|\overrightarrow{QM_0}||\vec{n}|\cos\alpha}{|\vec{n}|}\right|=\frac{|\overrightarrow{QM_0}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

$$=\frac{|(x_0-a,y_0-b,z_0-c)\cdot(A,B,C)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0-(aA+bB+cC)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$\because Q(a,b,c)\in\pi$，$\therefore aA+bB+cC+D=0\Rightarrow -(aA+bB+cC)=D$

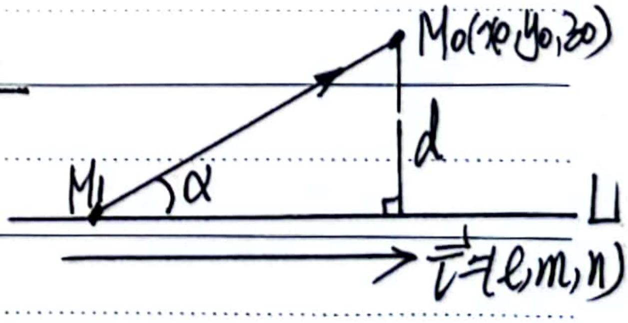
故明：$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

(一)/(2) 证明：点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 到直线 L：$\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$ 的

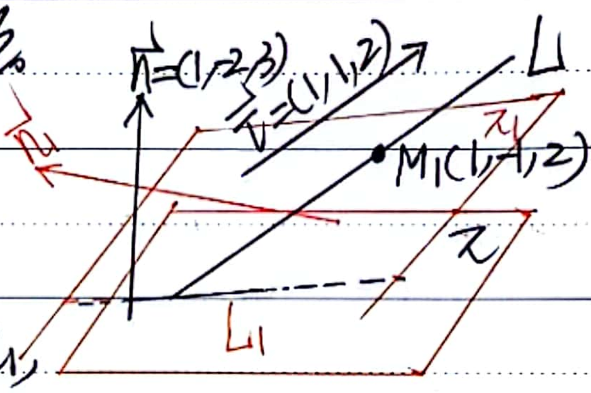
距离 $d=\dfrac{|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{\tau}|}{|\vec{\tau}|}$，其中 $\begin{cases}M_1=(x_1,y_1,z_1)\\ \vec{\tau}=(l,m,n)\end{cases}$ (如图2)

证：$d=|\overrightarrow{M_1M_0}|\sin\alpha=\dfrac{|\overrightarrow{M_1M_0}||\vec{\tau}|\sin\alpha}{|\vec{\tau}|}$

$=\dfrac{|\overrightarrow{M_1M_0}\times\vec{\tau}|}{|\vec{\tau}|}=\dfrac{|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{\tau}|}{|\vec{\tau}|}$.



(一)/(3) 求直线 $L:\ \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{2}$ 在平面 $\pi: x-2y+3z+1=0$ 中的投影直线 L_1 的方程。



解：过 L 上的已知点 $M_1(1,-1,2)$ 作 π 的垂面 π_1，则 π_1 的法向量 $\vec{n_1}=\vec{n}\times\vec{\tau}$，其中 $\begin{cases}\vec{n}=(1,-2,3)\\ \vec{\tau}=(1,1,2)\end{cases}$

而 $\vec{n_1}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-7i+1j+3k=(-7,1,3)$. 由平面的点法式方程知，$\pi_1$ 的方程为：$-7(x-1)+1(y+1)+3(z-2)=0$，即 $\pi_1: -7x+y+3z+2=0$，而所求的投影直线 L_1 正是平面 π 与垂面 π_1 的交线：$L_1\begin{cases}x-2y+3z+1=0\\ -7x+y+3z+2=0\end{cases}$

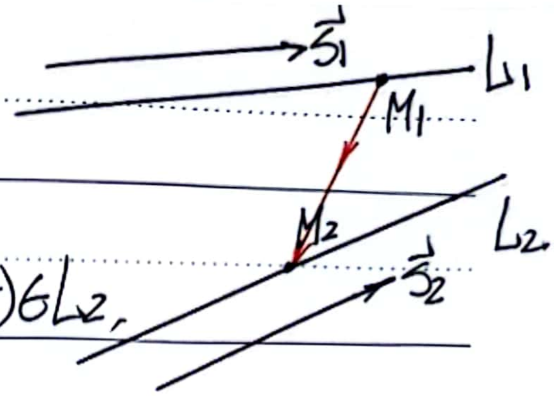
(三). 不在同一个平面中的两条直线称为异面直线.

证明：$L_1:\begin{cases}x+y-z-1=0\\ 2x+y-z-2=0\end{cases}$ 与 $L_2:\begin{cases}x+2y-z-2=0\\ x+2y+2z+2=0\end{cases}$ 为异面直线.

证：设 $\vec{s_1}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=(0,-1,-1)$, $\vec{s_2}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=(6,-3,0)$

取 $\vec{s_1}=(0,1,1)$, $\vec{s_2}=(2,-1,0)$，在 L_1 中令 $z=0$，从 $\begin{cases}x+y=1\\ 2x+y=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=0\\ z=0\end{cases}$

即 L_1 的方向向量为 $\vec{s_1}=(0,1,1)$ 且 $M_1(1,0,0)\in L_1$



在L_2中，令$y=0$，则$\begin{cases} x-z=2 \\ x+2z=-2 \end{cases}$

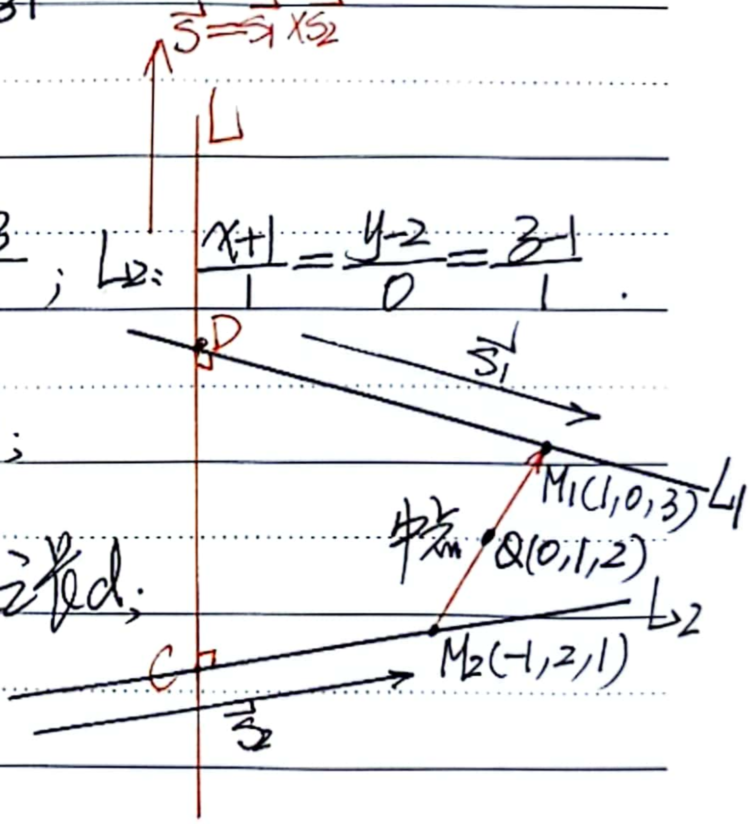
$\Rightarrow x=\frac{2}{3}, y=0, z=-\frac{4}{3}$ 即$M_2(\frac{2}{3},0,-\frac{4}{3})\in L_2$.

且$\overrightarrow{M_1M_2}=(\frac{2}{3},0,-\frac{4}{3})-(1,0,0)=(-\frac{1}{3},0,-\frac{4}{3})$

且$(\vec{s_1}\times\vec{s_2})\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{4}{3} \end{vmatrix}=0+0+0-\frac{1}{3}-0+\frac{8}{3}=\frac{7}{3}\neq 0$,

故L_1与L_2是异面直线。

(三) 设L_1: $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-3}{0}$；$L_2$: $\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-1}{1}$.



(1) 证明L_1与L_2是异面直线；

(2) 求L_1与L_2间的公垂线段之长d；

(3) 求公垂线L的方程；

(4) 求一个平面π，使$L_1 \parallel \pi$；$L_2 \parallel \pi$且π与L_1，L_2等距。

证(1). 以$\vec{s_1}=(2,-1,0)$，$\vec{s_2}=(1,0,1)$. $M_1(1,0,3)$，$M_2(-1,2,1)$ $\Rightarrow$

$\overrightarrow{M_2M_1}=(2,-2,2)\Rightarrow(\vec{s_1}\times\vec{s_2})\cdot\overrightarrow{M_2M_1}=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix}=0-2+0-0+4+2$

$=4\neq 0$. 故L_1与L_2是异面直线.

解(2)：设公垂线为L，则L⊥L_1，L⊥L_2，设$\vec{s}$是L的方向向量，

则 $\vec{s}\perp\vec{s}_1$，$\vec{s}\perp\vec{s}_2$，可取 $\vec{s}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=(-1,-2,1)$.

设公垂线段为CD，则C，D是两个垂足，向量$\overrightarrow{M_2M_1}$在公垂线方向向量$\vec{s}$上的投影：$|\overrightarrow{M_2M_1}|\cos(\widehat{\overrightarrow{M_2M_1},\vec{s}})$ 再取绝对值即是

公垂线段之长 $d=|CD|=\left||\overrightarrow{M_2M_1}|\cos(\widehat{\overrightarrow{M_2M_1},\vec{s}})\right|=\left|\cancel{|\overrightarrow{M_2M_1}|}\cdot\dfrac{\overrightarrow{M_2M_1}\cdot\vec{s}}{\cancel{|\overrightarrow{M_2M_1}|}\,|\vec{s}|}\right|$

$=|\overrightarrow{M_2M_1}\cdot\vec{s}|/|\vec{s}|=|\overrightarrow{M_2M_1}\cdot\vec{s}^{\,0}|=\left|(2,-2,2)\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right|$

$=\dfrac{4}{\sqrt{6}}=\dfrac{2}{3}\sqrt{6}$.

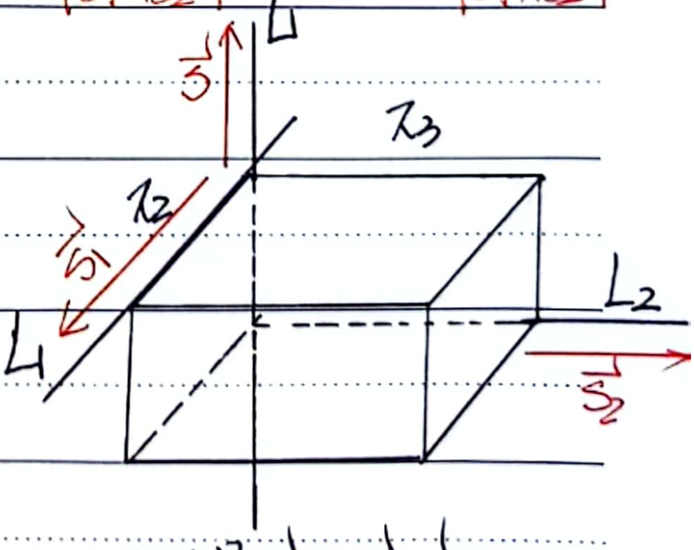
注：求异面直线L_1，L_2间的公垂线段之长的公式为：

$$d=|\overrightarrow{M_2M_1}\cdot\vec{s}|/|\vec{s}|\xlongequal{\vec{s}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2}\frac{|\overrightarrow{M_2M_1}\cdot(\vec{s}_1\times\vec{s}_2)|}{|\vec{s}_1\times\vec{s}_2|}=\frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\vec{s}_1\times\vec{s}_2)|}{|\vec{s}_1\times\vec{s}_2|}$$

解(3)：已知公垂线L的方向向量

$\vec{s}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=(-1,-2,1)$.

L_1的方向向量为$\vec{s}_1=(2,-1,0)$.



设L_1与L所在的平面为π_2，则π_2的法向量$\vec{n}_2=\vec{s}_1\times\vec{s}=(-1,-2,-5)$

且L_1上的点$M_1(1,0,3)$在π_2中，依点法式，π_2方程为： (1)

$\pi_2: -1(x-1)-2(y-0)-5(z-3)=0 \Leftrightarrow x+2y+5z-16=0$.

同理，设 L_2 与 L 所在的平面为 π_3，π_3 的法向量 $\vec{n_3}=\vec{s_2}\times\vec{s}$

$=(2,-2,-2)$，且 L_2 上的点 $M_2(-1,2,1)$ 在 π_3 中，故 π_3 的

方程为：$2(x+1)-2(y-2)-2(z-1)=0 \Leftrightarrow x-y-z+4=0$.

显然，平面 π_2，π_3 的交线是公垂线 L，故 L 的方程为：

$$L: \begin{cases} x+2y+5z-16=0 \\ x-y-z+4=0. \end{cases}$$

解(4)：因 $\pi // L_1$，$\pi // L_2$，所以 π 的法向量 $\vec{n}=\vec{s_1}\times\vec{s_2}=(-1,-2,1)$

又 π 与 L_1, L_2 等距，故 M_2, M_1 的中点 $Q(0,1,2)=Q\left(\frac{1-1}{2},\frac{0+2}{2},\frac{3+1}{2}\right)$

必在 π 上，即 $Q(0,1,2)\in\pi$，由点法式，π 的方程为

$-1(x-0)-2(y-1)+1(z-2)=0 \Leftrightarrow x+2y-z=0$ 为 π 的方程。

(四). 证明：　　　　下学期曲面积分中要用到。

(1). $|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$　(外积 $\vec{a}\times\vec{b}$ 与内积 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 的关系)

(2). $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}+(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a}+(\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b}=0$

证(1): ∵ $|\vec{a}\times\vec{b}|^2=(|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta_0)^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1-\cos^2\theta_0)$

$=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta_0)^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$

∴ $|\vec{a}\times\vec{b}|=(|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$

证(2): 称 $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ 为二重向量积, 且有:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a} \qquad (*_1).$$

$(*_1)$ 两边都是向量, 只要证明两边的对应坐标相同即可.

设 $\vec{a}=(a_1,b_1,c_1)$, $\vec{b}=(a_2,b_2,c_2)$, $\vec{c}=(a_3,b_3,c_3)$, 则 $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

$=i\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}+j\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=(b_1c_2-b_2c_1,\ c_1a_2-a_1c_2,\ a_1b_2-a_2b_1)$

左边 $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1c_2-b_2c_1 & c_1a_2-a_1c_2 & a_1b_2-a_2b_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=$

$i\begin{vmatrix} c_1a_2-a_1c_2 & a_1b_2-a_2b_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}+j\begin{vmatrix} a_1b_2-a_2b_1 & b_1c_2-b_2c_1 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} b_1c_2-b_2c_1 & c_1a_2-a_1c_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

其中, i 的系数 $=(c_1a_2-a_1c_2)c_3-b_3(a_1b_2-a_2b_1)=c_1c_3a_2+b_1b_3a_2-c_2c_3a_1-b_2b_3a_1$

而右边 $(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}=(a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3)(a_2,b_2,c_2)-$
$(a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3)(a_1,b_1,c_1)$ 中 i 的系数为

$(a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3)a_2-(a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3)a_1=b_1b_3a_2+c_1c_3a_2-b_2b_3a_1-c_2c_3a_1$

即(a1)式两边 $\vec{i}$ 的系数相同，同理，$\vec{j}$ 的系数相同，$\vec{k}$ 的系数也相同，即两边是同一个向量.

同理：
$$\begin{cases}(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a}=(\vec{b}\cdot\vec{a})\vec{c}-(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b} & (a_2)\\ (\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b}=(\vec{c}\cdot\vec{b})\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} & (a_3)\end{cases}$$

将(a1)，(a2)，(a3)两边相加得：

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}+(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a}+(\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b}=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}+(\vec{b}\cdot\vec{a})\vec{c}-$$
$$-(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}+(\vec{c}\cdot\vec{b})\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}=0$$

即二重向量积经轮换后，和为是零向量。

注：二重向量积 $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ 不具有结合律：$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}\neq\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$

同理：$(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}\neq\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$

四. (1) 求数λ，使直线 L_1：$\frac{x-1}{\lambda}=\frac{y+4}{5}=\frac{z-3}{-3}$ 与直线 L_2：$\frac{x+3}{3}=\frac{y-9}{-4}=\frac{z+14}{7}$ 相交.

(2). 求出 L_1 与 L_2 的交点 M_0;

(3). 求出 L_1 与 L_2 所确定的平面方程。

解(1): 设 $\vec{s_1}=(\lambda,5,-3)$, $M_1(1,-4,3)$, $\vec{s_2}=(3,-4,7)$

$M_2(-3,9,-14)$, 则 $\vec{s_1}$, $\vec{s_2}$, $\overrightarrow{M_1M_2}=(-4,13,-17)$ 共面时, L_1, L_2

才有可能相交. 即 $(\vec{s_1}\times\vec{s_2})\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=\begin{vmatrix}\lambda & 5 & -3\\ 3 & -4 & 7\\ -4 & 13 & -17\end{vmatrix}=0$ 时.

L_1 与 L_2 就有可能相交 $\Rightarrow 68\lambda-140-117+48-91\lambda+15\times17=0$

$\Rightarrow 23\lambda=46 \Rightarrow \lambda=2$. 此时 $\begin{cases}\vec{s_1}=(2,5,-3)\\ \vec{s_2}=(3,-4,7)\end{cases} \Rightarrow \vec{s_1}\nparallel\vec{s_2}$.

$\Rightarrow L_1\nparallel L_2$ 即 L_1 与 L_2 不仅共面且不平行, 从而必有交点。

解(2): 从 L_1: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+4}{5}=\frac{z-3}{-3}=t \Rightarrow \begin{cases}x=1+2t\\ y=-4+5t\\ z=3-3t\end{cases}$, $t\in R$

从 L_2: $\frac{x+3}{3}=\frac{y-9}{-4}=\frac{z+14}{7}=s \Rightarrow \begin{cases}x=-3+3s\\ y=9-4s\\ z=-14+7s\end{cases}$, $s\in R$

设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是 L_1 与 L_2 的交点, 则 $\begin{cases}x_0=1+2t=-3+3s\\ y_0=-4+5t=9-4s\\ z_0=3-3t=-14+7s\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}t=1\\ s=2\end{cases}$,

当 $t=1$ 时 $\begin{cases}x_0=1+2\times1=3\\ y_0=-4+5\times1=1\\ z_0=3-3\times1=0\end{cases}$

即 L_1 与 L_2 相交于点 $M_0(3,1,0)$.

例(3) 设L_1与L_2所确定的平面为π，法向量为$\vec{n}$，

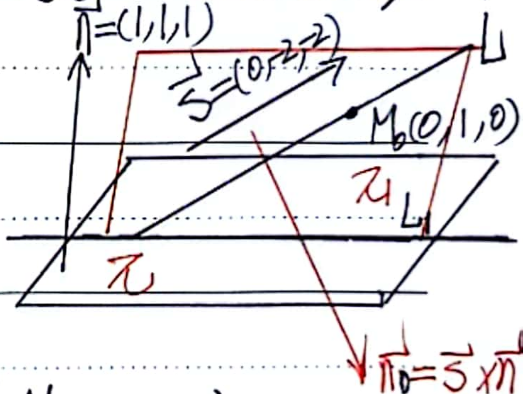
则 $\vec{n}=\vec{s_1}\times\vec{s_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 5 & -3 \\ 3 & -4 & 7 \end{vmatrix}=(23,-23,-23)$，取$\vec{n}=(1,-1,-1)$

且定点$M_0(3,1,0)$在π上，依点法式：π的方程为：

$1\cdot(x-3)-1\cdot(y-1)-1\cdot(z-0)=0 \Leftrightarrow x-y-z-2=0$.

(六) 求直线L：$\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 在平面π：$x+y+z=0$上的投影直线

方程L_1. (ex8.2/33)



解 L的方向向量$\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

$=(0,-2,-2)$，令$z=0$ 从 $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=-1 \end{cases}$ 得L上点$M_0(0,1,0)$.

设过L且垂直于平面π的平面为π_1，则π_1的法向量$\vec{n_0}=\vec{s}\times\vec{n}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$=(0,-2,2)$ 且点$M_0(0,1,0)$在π_1上，依点法式，π_1为

$0(x-0)-2(y-1)+2(z-0)=0 \Rightarrow -y+z+1=0$，此时，投影直线$L_1$

的方程为 $\begin{cases} -y+z+1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$。

(七) 作业：ex8.2/18(1)；19(1)；20(2)；21(1)；22(1)；23(1)；
29；30.