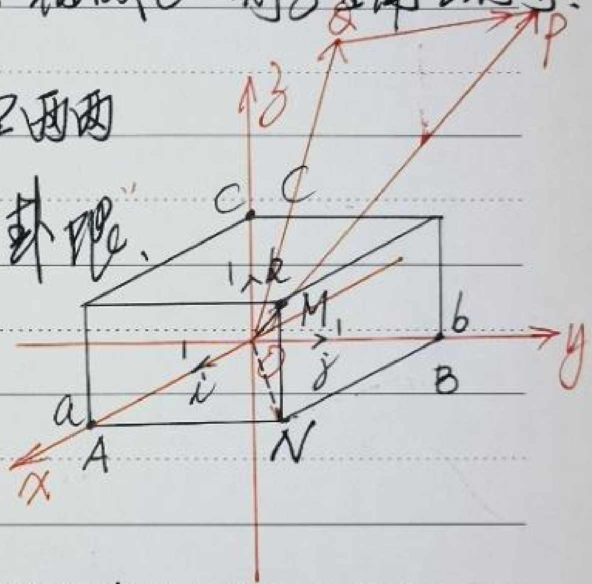
数分B2 第1讲：三维向量的五种运算

(一) 三维直角坐标系与三维向量的线性运算：

(1) 直角坐标系：从空间一点O出发，作三条两两垂直(正交)的射线，并确定单位与方向，构成O—xyz直角坐标系：

xoy坐标面，yoz坐标面，xoz坐标面两两

正交，并将整个空间分割成八个卦限。



设M为空间任一点，过M点

分别作ox, oy, oz轴的垂面.

可得三个垂足A, B, C，设A, B, C代表的实数为a, b, c，

则点M与有序数组(a, b, c)一一对应，记作M(a, b, c).

坐标原点为O(0,0,0). 在ox, oy, oz轴正向上分别取三个

单位向量 i, j, k. 则 $\overrightarrow{OA}=ai$, $\overrightarrow{OB}=bj$, $\overrightarrow{OC}=ck$, 依向量平面

加法的平行四边形法则，$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=ai+bj$

n维向量：N-dimensional Vector

再依平面向量的三角形法则，$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OC}$

$=ai+bj+ck \triangleq (a,b,c)$. 从而，点M与向径$\overrightarrow{OM}$及向量

(a,b,c)三者之一一对应。显然有：$i=(1,0,0)$，$j=(0,1,0)$，

$k=(0,0,1)$且$i\perp j$，$i\perp k$，$j\perp k$. 且$|\overrightarrow{OM}|^2=|\overrightarrow{ON}|^2+|\overrightarrow{NM}|^2=a^2+b^2+c^2$

$\Rightarrow |\overrightarrow{OM}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$，称$|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=|(a,b,c)|$为向量$\overrightarrow{OM}$的模。

模为零的向量记作$\theta=(0,0,0)$，模为1的向量称为单位向量。

设向量$\vec{\alpha}=(a,b,c)\neq\theta$，则$|\vec{\alpha}|\neq 0$，此时，$\frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}\triangleq\vec{\alpha}^0=\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$

必是单位向量。

设$Q(x_1,y_1,z_1)$，$P(x_2,y_2,z_2)$是空间的任意两点，则

$\overrightarrow{OP}=(x_2,y_2,z_2)$，$\overrightarrow{OQ}=(x_1,y_1,z_1)$，$\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=(x_2,y_2,z_2)-(x_1,y_1,z_1)$

$=(x_2i+y_2j+z_2k)-(x_1i+y_1j+z_1k)=(x_2-x_1)i+(y_2-y_1)j+(z_2-z_1)k=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$

即空间的任一个向量$\overrightarrow{QP}=(x_2-x_1)i+(y_2-y_1)j+(z_2-z_1)k$.

空间中的向量有无数个，但每一个都可用单位向量i,j,k线性表示出来，因此，称i,j,k为三维向量空间的标准正交基。

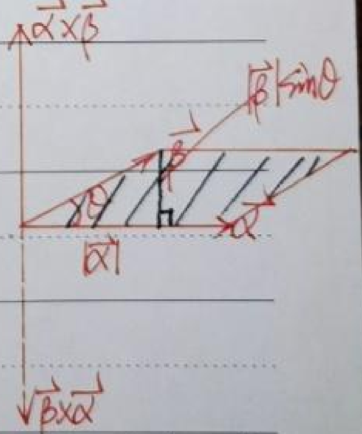
三维向量：three-dimensional Vector

(2).

在n维与有限维的向量空间中，一旦选定了基向量，则无限的问题便可有限化表示了。

(2). 三维数组向量的线性运算法则：设 $\begin{cases}\vec{\alpha}=(a_1,b_1,c_1), \\ \vec{\beta}=(a_2,b_2,c_2),\end{cases}$ $\lambda_1,\lambda_2\in R$. 则 $\vec{\alpha}\pm\vec{\beta}=(a_1i+b_1j+c_1k)\pm(a_2i+b_2j+c_2k)=(a_1\pm a_2)i+(b_1\pm b_2)j+(c_1\pm c_2)k=(a_1\pm a_2,b_1\pm b_2,c_1\pm c_2)$；$\lambda_1\vec{\alpha}=\lambda_1(a_1i+b_1j+c_1k)=\lambda_1a_1i+\lambda_1b_1j+\lambda_1c_1k=(\lambda_1a_1,\lambda_1b_1,\lambda_1c_1)$. 称 $\lambda_1\vec{\alpha}$ 为数 λ_1 与向量 $\vec{\alpha}$ 的数乘：$\lambda_1(a_1,b_1,c_1)=(\lambda_1a_1,\lambda_1b_1,\lambda_1c_1)$.

向量的加法、减法与数乘三种运算统称为向量的线性运算，统一为：$\lambda_1\vec{\alpha}+\lambda_2\vec{\beta}=(\lambda_1a_1,\lambda_1b_1,\lambda_1c_1)+(\lambda_2a_2,\lambda_2b_2,\lambda_2c_2)=(\lambda_1a_1+\lambda_2a_2,\lambda_1b_1+\lambda_2b_2,\lambda_1c_1+\lambda_2c_2)$.



(三) 向量 $\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\beta}$ 的内积与外积：

设 $\vec{\alpha}=(a_1,b_1,c_1)$，$\vec{\beta}=(a_2,b_2,c_2)$. 定义：

(1) $\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\beta}$ 的内积为 $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\cos(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$

(2) $\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\beta}$ 的外积为 $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}$ 且 $\begin{cases}\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\perp\vec{\alpha},\ \vec{\alpha}\times\vec{\beta}\perp\vec{\beta},\ \vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\text{ 右手系} \\ |\vec{\alpha}\times\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sin(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})\end{cases}$

(3).

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\cos(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$的规定来源于物理中力作功的运算。

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$是一个数，故称内积$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$为数量积，或者称为点乘。

$|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sin(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$且$\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\perp\vec{\alpha}$，$\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\perp\vec{\beta}$，$\vec{\alpha}$，$\vec{\beta}$，$\vec{\alpha}\times\vec{\beta}$成右手系

的规定来源于物理中的力矩的运算。$\vec{\alpha}\times\vec{\beta}$是一个新向量。

故称$\vec{\alpha}\times\vec{\beta}$为向量积，或者为叉乘。

Th1：(1). $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Longleftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0\Longleftrightarrow a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$

(2). $\vec{\alpha}\parallel\vec{\beta}\Longleftrightarrow\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=\theta\Longleftrightarrow\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\Longleftrightarrow\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$.

证(1)：若$\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$，则$\cos(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=0$，$\Rightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\cos(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=0$

且$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=(a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k})\cdot(a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k})=a_1a_2\vec{i}\cdot\vec{i}+a_1b_2\vec{i}\cdot\vec{j}+a_1c_2\vec{i}\cdot\vec{k}$

$+b_1a_2\vec{j}\cdot\vec{i}+b_1b_2\vec{j}\cdot\vec{j}+b_1c_2\vec{j}\cdot\vec{k}+c_1a_2\vec{k}\cdot\vec{i}+c_1b_2\vec{k}\cdot\vec{j}+c_1c_2\vec{k}\cdot\vec{k}$.

而$\vec{i}\cdot\vec{i}=|\vec{i}||\vec{i}|\cos(\widehat{\vec{i},\vec{i}})=1\times1\times\cos0=1=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}$，由$\vec{i}\perp\vec{j}$，$\vec{i}\perp\vec{k}$，$\vec{j}\perp\vec{k}$

$\Rightarrow\vec{i}\cdot\vec{j}=0=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{k}$，从而$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$，故

$\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Rightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0\Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$

若已知$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$，则$|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\cos(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=0$，若$|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\neq0$则

$\cos(\widehat{\vec\alpha,\vec\beta})=0$，从而 $\vec\alpha\perp\vec\beta$；若 $|\vec\alpha||\vec\beta|=0$，则 $|\vec\alpha|=0$ 或 $|\vec\beta|=0$，

此时 $\vec\alpha=\vec 0$ 或 $\vec\beta=\vec 0$，而零向量 $\vec 0$ 垂直于任意向量，故 $\vec\alpha\perp\vec\beta$.

于是：$\vec\alpha\perp\vec\beta \Leftrightarrow \vec\alpha\cdot\vec\beta=0 \Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$.

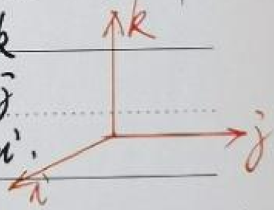
证(2)：若 $\vec\alpha\parallel\vec\beta$，则 $\sin(\widehat{\vec\alpha,\vec\beta})=0 \Rightarrow |\vec\alpha\times\vec\beta|=|\vec\alpha||\vec\beta|\sin(\widehat{\vec\alpha,\vec\beta})=0$

$\Rightarrow \vec\alpha\times\vec\beta=\vec 0$. 反之，若 $\vec\alpha\times\vec\beta=\vec 0$，则 $|\vec\alpha\times\vec\beta|=|\vec 0|=0=|\vec\alpha||\vec\beta|\sin(\widehat{\vec\alpha,\vec\beta})$

若 $|\vec\alpha||\vec\beta|\neq 0$，则 $\sin(\widehat{\vec\alpha,\vec\beta})=0 \Leftrightarrow \vec\alpha\parallel\vec\beta$，若 $|\vec\alpha||\vec\beta|=0$，则 $|\vec\alpha|=0$ 或

$|\vec\beta|=0 \Rightarrow \vec\alpha=\vec 0$ 或 $\vec\beta=\vec 0$，而零向量 $\vec 0$ 平行于任意向量，故 $\vec\alpha\parallel\vec\beta$.

再记 $i\times i=\vec 0,\ j\times j=\vec 0=k\times k$，$\begin{cases} i\times j=k \\ k\times i=j \\ j\times k=i \end{cases}$，$\begin{cases} j\times i=-k \\ i\times k=-j \\ k\times j=-i \end{cases}$



$\Rightarrow \vec\alpha\times\vec\beta=(a_1i+b_1j+c_1k)\times(a_2i+b_2j+c_2k)=a_1a_2\, i\times i+a_1b_2\, i\times j+a_1c_2\, i\times k+$

$b_1a_2\, j\times i+b_1b_2\, j\times j+b_1c_2\, j\times k+c_1a_2\, k\times i+c_1b_2\, k\times j+c_1c_2\, k\times k=$

$a_1a_2\vec 0+a_1b_2k+a_1c_2(-j)+b_1a_2(-k)+b_1b_2\vec 0+b_1c_2i+c_1a_2j+c_1b_2(-i)+c_1c_2\vec 0$

$=(b_1c_2-c_1b_2)i+(c_1a_2-a_1c_2)j+(a_1b_2-a_2b_1)k \triangleq \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

由 $\vec\alpha\parallel\vec\beta \Leftrightarrow \vec\alpha\times\vec\beta=\vec 0=(0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} b_1c_2-c_1b_2=0 \\ c_1a_2-a_1c_2=0 \\ a_1b_2-a_2b_1=0 \end{cases}$，

$\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}\triangleq\lambda$.

$\Rightarrow a_1=\lambda a_2,\ b_1=\lambda b_2,\ c_1=\lambda c_2 \Rightarrow \vec\alpha=(a_1,b_1,c_1)=(\lambda a_2,\lambda b_2,\lambda c_2)=\lambda\vec\beta$. (5).

(三) 例题：设 $\vec{\alpha}=(a_1,b_1,c_1)$，$\vec{\beta}=(a_2,b_2,c_2)$，$\vec{\gamma}=(a_3,b_3,c_3)$.

(1) 证明 Cauchy 不等式：$|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2| \le \sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}$.

(2) 证明：$|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}|^2=|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2-(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2$（曲面积分中要用到此式）

(3) 证明：$(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}=(\vec{\beta}\times\vec{\gamma})\cdot\vec{\alpha}=(\vec{\gamma}\times\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

(4) 证明：三个向量 $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ 共面 $\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$.

(5) $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ 与 $\lambda_1\vec{\alpha}+\lambda_2\vec{\beta}$ 必是共面的，$\forall \lambda_1,\lambda_2\in R$.

证(1) 利用：$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\cos(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) \Longrightarrow |\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}| \le |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\cdot 1 \Rightarrow$

$|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2| \le \sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}$.

推广，在 n 维向量空间中，设 $\vec{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\vec{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，

则 $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\triangleq(\vec{\alpha},\vec{\beta})\triangleq|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\cos(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) \Longrightarrow |\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}| \le |\vec{\alpha}||\vec{\beta}| \Rightarrow |a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n| \le$

$\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}$ —— Cauchy 不等式。

证(2)：$\because |\vec{\alpha}\times\vec{\beta}|^2=\left(|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sin(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})\right)^2=|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2\left(1-\cos^2(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})\right)$

$=|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2-\left(|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\cos(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})\right)^2=|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2-(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2$. $\therefore$ 命题成立.

证(3). ∵ $(\vec\alpha\times\vec\beta)\cdot\vec\gamma=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}\cdot(a_3 i+b_3 j+c_3 k)=$

$\big((b_1c_2-c_1b_2)i+(c_1a_2-a_1c_2)j+(a_1b_2-b_1a_2)k\big)\cdot(a_3 i+b_3 j+c_3 k)$

$=(b_1c_2-c_1b_2)a_3+(c_1a_2-a_1c_2)b_3+(a_1b_2-b_1a_2)\cdot c_3=\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

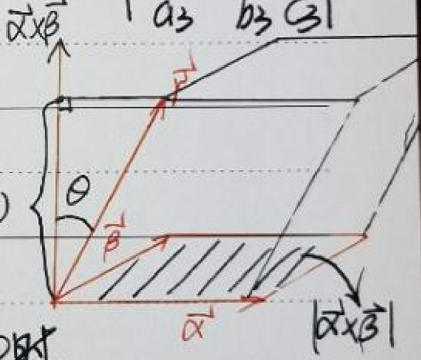
$=-\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，同理，$(\vec\beta\times\vec\gamma)\cdot\vec\alpha=(\vec\gamma\times\vec\alpha)\cdot\vec\beta$

$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

证(4)：利用 $(\vec\alpha\times\vec\beta)\cdot\vec\gamma=|\vec\alpha\times\vec\beta||\vec\gamma|\cos(\widehat{\vec\alpha\times\vec\beta,\vec\gamma})=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

而$|\vec\alpha\times\vec\beta|$是以$\vec\alpha,\vec\beta$为邻边的▱面积，

$|\vec\gamma|\cos(\widehat{\vec\alpha\times\vec\beta,\vec\gamma})$是以$\vec\alpha,\vec\beta,\vec\gamma$为 $h=|\vec\gamma|\cos(\widehat{\vec\alpha\times\vec\beta,\vec\gamma})$



棱的平行六面体的高"，当$\cos(\widehat{\vec\alpha\times\vec\beta,\vec\gamma})>0$时，

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$即是以$\vec\alpha,\vec\beta,\vec\gamma$为棱的平行六面体的体积。

于是，$\vec\alpha,\vec\beta,\vec\gamma$共面 $\Leftrightarrow$ 平行六面体体积为零 $\Leftrightarrow$ $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$

当$\cos(\widehat{\vec\alpha\times\vec\beta,\vec\gamma})<0$时，$-\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$是以$\vec\alpha,\vec\beta,\vec\gamma$为棱的平行六面体的体积，当$\vec\alpha,\vec\beta,\vec\gamma$共面时，$-\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$.

同样由 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$ 即 $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ 共面 $\Leftrightarrow (\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}=0$

称 $(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}$ 为 $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ 的混~~合~~积，于是混~~合~~积的绝对值：$|(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}|=\left|\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\right|$ 一定是以 $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ 为棱的平行六面体的体积。

证(5)：利用 $(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\cdot(\lambda_1\vec{\alpha}+\lambda_2\vec{\beta})=\lambda_1\vec{\alpha}\cdot(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})+\lambda_2\vec{\beta}\cdot(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})$

$=\lambda_1 0+\lambda_2 0=0$ 由(4)知，$\vec{\alpha},\vec{\beta}$ 与 $\lambda_1\vec{\alpha}+\lambda_2\vec{\beta}$ 是共面向量。

(四)作业：ex8.1：

6; 9; 10; 12; 14; 17; 23; 26.

(五)教学参考书：

(1). 黄庚哲、史济怀编《数学分析教程》上、下册；(中科大数分A)

(2). 欧阳光中等编《数学分析》上、下册；(复旦数分A)

(3). 吉米多维奇《数学分析习题集》及其学习指导 (1,2,3册)

(4). 程其襄等《数学分析学习指导》上、下册。

(5). 裴礼文等《数学分析中的典型问题与方法》.

(6) 卓里奇《数学分析》第1,2册（第四版）.

(六). 2023级数分B2教学团队：

(1). 主讲：汪琥庭, wanght@ustc.edu.cn;

(2). 助教：母子跃, mu20041118@mail.ustc.edu.cn;

(3). 助教：于俊骜, yujunao@mail.ustc.edu.cn;

(4). 助教：王若言, wry3sa@126.com.

(七). 从第二周起，每周一交一次作业，作业成绩占总成绩的20%左右；随堂测验不定期举行，占总成绩的10%左右；期中考试成绩占总成绩的30%左右；期终成绩占总成绩的40%左右。(注：期中考试与随堂测验不安排补考)