第五周作业答案

于俊骜

2024 年 4 月 7 日

习题 9.5

2

(2)

$$
\begin{aligned}
f(x_0+k,y_0+k)-f(x_0,y_0) &= (x_0+k)^2(y_0+h)-x_0^2y_0+(x_0+k)(y_0+h)^2 \\
&\quad -x_0y_0^2-2(x_0+k)(y_0+h)+2x_0y_0 \\
&= (2kx_0+k^2)y_0+h(x_0+k)^2+x_0(2hy_0+h^2) \\
&\quad +k(y_0+h)^2-2hx_0-2ky_0-2kh \\
&= h-3k-h^2-2hk+k^2+kh^2+k^2h
\end{aligned}
$$

3

证明. $f(x,y)$ 显然偏导数连续，且

$$
f\left(0,\frac{1}{2}\right)=0 \qquad f\left(\frac{1}{2},0\right)=2
$$

由 $0<\frac{4}{\pi}<2$ 知，存在 $\theta\in(0,1)$，使得

$$
\frac{4}{\pi}=f\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\theta,\frac{1}{2}\theta\right)=\cos\frac{\pi\theta}{2}+\sin\frac{\pi(1-\theta)}{2}
$$

$\square$

4

本题中记 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$。

(1)

$$
\begin{aligned}
f(x,y)=e^x\ln(1+y)&=\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}+o(y^3)\right)\\
&=y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}+xy-\frac{xy^2}{2}+\frac{x^2y}{2}+o(\rho^3)
\end{aligned}
$$

展开式成立的区域为 $\mathbb{R}\times(-1,+\infty)$。

(3)

$$
f(x,y)=\frac{1}{(1-x)(1-y)}=\left(\sum_{i=0}^{\infty}x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty}y^i\right)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}x^{i-j}y^j+o(\rho^n)
$$

展开式成立的区域为 $(-1,1)^2$。

(7)

不难得到 f 的三阶即以上偏导数为 0，且

$$
f_x=4x-y-6\qquad f_y=-x-2y-3\qquad f_{xx}=4\qquad f_{xy}=-1\qquad f_{yy}=-2
$$

于是

$$
f(x,y)=2x^2-xy-y^2-6x-2y+5=5+2(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2
$$

展开式成立的区域为 $\mathbb{R}^2$。

5

两边微分，得到

$$
3z^2\,\mathrm{d}z-2z\,\mathrm{d}x-2x\,\mathrm{d}z+\mathrm{d}y=0\Longrightarrow\mathrm{d}z=\frac{2z}{3z^2-2x}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{3z^2-2x}\,\mathrm{d}y
$$

即

$$
\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2z}{3z^2-2x}\qquad\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{3z^2-2x}
$$

进一步

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{2(3z^2-2x)\,\mathrm{d}z-2z(6z\,\mathrm{d}z-2\,\mathrm{d}x)}{(3z^2-2x)^2}\\
&=\frac{2}{3z^2-2x}\,\mathrm{d}z-\frac{12z^2}{(3z^2-2x)^2}\,\mathrm{d}z+\frac{4z}{(3z^2-2x)^2}\,\mathrm{d}x\\
&=-\frac{6z^2+4x}{(3z^2-2x)^2}\left(\frac{2z}{3z^2-2x}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{3z^2-2x}\,\mathrm{d}y\right)+\frac{4z}{(3z^2-2x)^2}\,\mathrm{d}x\\
&=-\frac{16xz}{(3z^2-2x)^3}\,\mathrm{d}x+\frac{6z^2+4x}{(3z^2-2x)^3}\,\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{6z\,\mathrm{d}z - 2\,\mathrm{d}x}{(3z^2-2x)^2} \\
&= -2(3z^2-2x)^2\,\mathrm{d}x + \frac{6z}{(3z^2-2x)^2}\left(\frac{2z}{3z^2-2x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3z^2-2x}\,\mathrm{d}y\right) \\
&= \frac{6z^2+4x}{(3z^2-2x)^3}\,\mathrm{d}x - \frac{6z}{(3z^2-2x)^3}\,\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

即

$$
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{16xz}{(3z^2-2x)^3} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{6z^2+4x}{(3z^2-2x)^3} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{6z}{(3z^2-2x)^3}
$$

代入 $(x,y,z)=(1,1,1)$，得到展开式

$$
z(x,y) = 1 + 2(x-1) - (y-1) - 16(x-1)^2 + 10(x-1)(y-1) - 6(y-1)^2 + o(\rho^2)
$$

其中 $\rho = \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$。

7

(1)

$$
\left.\begin{aligned}
f_x(x,y) &= y - \frac{50}{x^2} = 0 \\
f_y(x,y) &= x - \frac{20}{y^2} = 0
\end{aligned}\right\} \Longrightarrow (x,y) = (5,2)
$$

进一步

$$
\left.\begin{aligned}
f_{xx}(x,y) = \frac{100}{x^3} &\Longrightarrow f_{xx}(5,2) = \frac{4}{5} \\
f_{xy}(x,y) = 1 &\Longrightarrow f_{xy}(5,2) = 1 \\
f_{yy}(x,y) = \frac{40}{y^3} &\Longrightarrow f_{yy}(5,2) = 5
\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} > 0
$$

因此 $(5,2)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点，极小值为 $f(5,2)=30$。

(2)

$$
\left.\begin{aligned}
f_x(x,y) &= 4 - 2x = 0 \\
f_y(x,y) &= -4 - 2y = 0
\end{aligned}\right\} \Longrightarrow (x,y) = (2,-2)
$$

进一步

$$
\left.\begin{aligned}
f_{xx}(x,y) &= -2 \\
f_{xy}(x,y) &= 0 \\
f_{yy}(x,y) &= -2
\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} < 0
$$

因此 $(2,-2)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点，极大值为 $f(2,-2)=8$。

(3)

$$\left.\begin{aligned} f_x(x,y) = e^{2x}(2x+4y+2y^2+1) = 0 \\ f_y(x,y) = 2e^{2x}(y+1) = 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow (x,y) = \left(\frac{1}{2}, -1\right)$$

进一步

$$\left.\begin{aligned} f_{xx}(x,y) = 4e^{2x}(x+2y+y^2+1) \Longrightarrow f_{xx}\left(\frac{1}{2},1\right) = 18e \\ f_{xy}(x,y) = 2e^{2x}(y+1) \Longrightarrow f_{xy}\left(\frac{1}{2},1\right) = 4e \\ f_{yy}(x,y) = 2e^{2x} \Longrightarrow f_{yy}\left(\frac{1}{2},1\right) = 2e \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18e & 4e \\ 4e & 2e \end{pmatrix} > 0$$

因此 $(\frac{1}{2}, -1)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点，极小值为 $f(\frac{1}{2}, 1) = -\frac{1}{2}e$。

(4)

两边微分，得到

$$4(x^2+y^2)(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y) = 2a^2(x\,\mathrm{d}x - y\,\mathrm{d}y)$$

于是

$$y'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{a^2x - 2x(x^2+y^2)}{a^2y + 2y(x^2+y^2)} = 0 \Longrightarrow x(2x^2+2y^2-a^2) = 0$$

代入 $x=0$，得到 $y=0$。代入 $2(x^2+y^2)=a^2$，得到

$$x = \pm\frac{\sqrt{6}}{4}a \qquad y = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}a$$

进一步

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{a-6x^2-4xy-2y^2}{(a^2y+2y(x^2+y^2))^2}\,\mathrm{d}x - \frac{a+2x^2+4xy+6y^2}{(a^2y+2y(x^2+y^2))^2}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{a-6x^2-4xy-2y^2}{(a^2y+2y(x^2+y^2))^2}\,\mathrm{d}x - \frac{(a^2x-2x(x^2+y^2))(a+2x^2+4xy+6y^2)}{(a^2y+2y(x^2+y^2))^3}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

即

$$y''(x) = \frac{(a-6x^2-4xy-2y^2)(a^2y+2y(x^2+y^2)) - (a^2x-2x(x^2+y^2))(a+2x^2+4xy+6y^2)}{(a^2y+2y(x^2+y^2))^3}$$

代入 x, y 的值，知 $(\pm\frac{\sqrt{6}}{4}a, -\frac{\sqrt{2}}{4}a)$ 是极小值点，极小值均为 $-\frac{\sqrt{2}}{4}a$；$(\pm\frac{\sqrt{6}}{4}a, \frac{\sqrt{2}}{4}a)$ 为极大值点，极大值均为 $\frac{\sqrt{2}}{4}a$。

(5)

注意到，这是椭球面

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 16$$

于是不难得到极小值点为 $(1,-1,-2)$，极小值为 -2；极大值点为 $(1,-1,6)$，极大值为 6。

8

由题，设 $0 \leq A, B, C \leq \pi$，且 $A+B+C=\pi$。考虑函数

$$f(A,B,C)=\sin A\sin B\sin C+\lambda(A+B+C-\pi)$$

则

$$\begin{cases} f_A(A,B,C)=\cos A\sin B\sin C+\lambda=0 \\ f_B(A,B,C)=\sin A\cos B\sin C+\lambda=0 \\ f_C(A,B,C)=\sin A\sin B\cos C+\lambda=0 \\ A+B+C=\pi \end{cases}$$

解得 $\tan A=\tan B=\tan C$，即 $A=B=C=\frac{\pi}{3}$。此时为等边三角形。

10

(1)

考虑函数

$$F(x,y)=x^2+y^2+\lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)$$

则

$$\begin{cases} F_x(x,y)=2x+\dfrac{\lambda}{a}=0 \\ F_y(x,y)=2y+\dfrac{\lambda}{b}=0 \\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1 \end{cases}$$

解得

$$x=\frac{ab^2}{a^2+b^2} \qquad y=\frac{a^2b}{a^2+b^2}$$

进一步

$$u_{xx}=u_{yy}=2 \qquad u_{xy}=0$$

于是 $(\frac{ab^2}{a^2+b^2},\frac{a^2b}{a^2+b^2})$ 显然是极小值点，极小值为 $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$。

(4)

考虑函数

$$F(x,y,z)=xyz+\lambda(x+y+z)+\mu(x^2+y^2+z^2)$$

则

$$\begin{cases} F_x(x,y,z)=yz+\lambda+2\mu x=0 \\ F_y(x,y,z)=xz+\lambda+2\mu y=0 \\ F_z(x,y,z)=xy+\lambda+2\mu z=0 \\ x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$$

不难注意到 x,y,z 不可能彼此相等。

前三个方程两两相减，得到

$$\begin{aligned}(z-2\mu)(x-y)=0\\(y-2\mu)(x-z)=0\\(x-2\mu)(y-z)=0\end{aligned}$$

由于 x,y,z 不可能均为 2μ，于是由对称性，设 $y=z$，此时必有 $y=z=2\mu$。

代入最后两个方程，得到

$$x+2y=0 \qquad x^2+2y^2=1$$

解得 $(x,y,z)=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1)$。因此，方程组的解有

$$\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1) \qquad \pm\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1) \qquad \pm\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$$

分别代入原函数，可得极大值为 $\frac{1}{3\sqrt{6}}$，极小值为 $-\frac{1}{3\sqrt{6}}$。

11

(2)

在内部

$$\left.\begin{aligned}0=\frac{\partial z}{\partial x}=2x-y\\0=\frac{\partial z}{\partial y}=-x+2y\end{aligned}\right\}\Longrightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$$

此时 $z=0$。

在边界，若 $x+y=\pm1$，则

$$z=(x+y)^2-3xy=1-3xy=3x^2\pm3x+1=3\left(x\pm\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\in\left[\frac{1}{4},1\right]$$

若 $x-y=\pm1$，则

$$z=(x-y)^2+xy=1+xy=x^2\pm x+1=\left(x\pm\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\in\left[\frac{3}{4},1\right]$$

综上，最大值为 1，最小值为 0。

(4)

在内部

$$\left.\begin{aligned}0=\frac{\partial z}{\partial x}=2xy(4-x-y)-x^2y\\0=\frac{\partial z}{\partial y}=x^2(4-x-y)-x^2y\end{aligned}\right\}\Longrightarrow\begin{cases}x+2y=4\\3x+2y=8\end{cases}$$

解得 $(x,y)=(2,1)$，此时 $z=4$。

在边界，若 $x=0$ 或 $y=0$，则 $z=0$。若 $x+y=6$，则

$$z=-2x^2y=2(x^3-6x^2)\in[-64,0]$$

综上，最大值为 4，最小值为 -64。

12

设所求点为 $(2s,t,3s)$，则距离平方和为

$$\begin{aligned}
f(s,t)&=(2s-1)^2+(t-1)^2+(3s-1)^2+(2s-2)^2+(t-3)^2+(3s-4)^2\\
&=26s^2-42s+2t^2-8t+32\\
&=26\left(s-\frac{21}{26}\right)^2+2(t-2)^2+\frac{183}{26}\\
&\geq\frac{183}{26}
\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $s=\frac{21}{26},t=2$。于是所求点为 $(\frac{21}{13},2,\frac{63}{26})$。

15

证明. 由题，可考虑函数

$$f(R,h,H)=2\pi RH+\pi R\sqrt{R^2+h^2}+\lambda\left(\pi R^2H+\frac{1}{3}\pi R^2h-V_0\right)$$

则

$$\begin{cases}
f_R(R,h,H)=2\pi H+\pi\sqrt{R^2+h^2}+\dfrac{2\pi R^2}{\sqrt{R^2+h^2}}+\lambda\left(2\pi RH+\dfrac{2}{3}\pi Rh\right)=0\\
f_h(R,h,H)=\dfrac{2\pi Rh}{\sqrt{R^2+h^2}}+\dfrac{1}{3}\lambda\pi R^2=0\\
f_H(R,h,H)=2\pi R+2\lambda\pi R^2=0\\
\pi R^2H+\dfrac{1}{3}\pi R^2h=V_0
\end{cases}$$

由前三个方程可解得 $R=\sqrt{5}H,h=2H$。 □

17

设切点为 $(a\cos\theta,b\sin\theta)$，则切线为

$$\frac{2\cos\theta}{a}(x-a\cos\theta)+\frac{2\sin\theta}{b}(y-b\sin\theta)=0\Longrightarrow\frac{\cos\theta}{a}x+\frac{\sin\theta}{b}y=1$$

围成的三角形面积为

$$S=\frac{ab}{2\sin\theta\cos\theta}=\frac{ab}{\sin 2\theta}\geq\frac{1}{2}ab$$

等号成立当且仅当 $\theta=\frac{\pi}{4}$。

18

点 (x_0, y_0) 与题中 n 个点的距离平方和为

$$
\begin{aligned}
f(x_0, y_0) &= \sum_{i=1}^{n} \left((x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2\right) \\
&= nx_0^2 + ny_0^2 - 2x_0 \sum_{i=1}^{n} x_i - 2y_0 \sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + y_i^2) \\
&= n\left(x_0 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 + n\left(y_0 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2) - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2 \\
&\geq \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2) - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2
\end{aligned}
$$

等号成立当且仅当

$$
(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right)
$$

19

设该长方体位于第一卦限的顶点为 (x, y, z)，则体积为 $8xyz$。考虑函数

$$
f(x, y, z) = 8xyz + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)
$$

则

$$
\begin{cases}
f_x(x, y, z) = yz + \dfrac{2\lambda}{a^2}x = 0 \\
f_y(x, y, z) = xz + \dfrac{2\lambda}{b^2}y = 0 \\
f_z(x, y, z) = xy + \dfrac{2\lambda}{c^2}z = 0 \\
\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1
\end{cases}
$$

解得 $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$，即 $(x, y, z) = (\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}})$，此时体积最大，为 $\frac{8}{3\sqrt{3}}abc$。

20

不难得到椭球面和平面不相交。于是对于椭球上的点 (x_0, y_0, z_0)，该处的切平面为

$$
\frac{x_0}{2}(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) + 2z_0(z - z_0) = 0
$$

距离取最值时，它与题中平面平行，即

$$
\frac{x_0}{4} = y_0 = \frac{z_0}{2} \Longrightarrow (x_0, y_0, z_0) = \lambda(4, 1, 2)
$$

代入椭球面方程，得 $\lambda = \pm\frac{1}{3}$，此时 $(x_0, y_0, z_0) = \pm\frac{1}{3}(4, 1, 2)$，切平面为

$$
2\left(x \pm \frac{4}{3}\right) + 2\left(y \pm \frac{1}{3}\right) + 4\left(x \pm \frac{2}{3}\right) = 0 \Longrightarrow x + y + 2z = \pm 3
$$

进而可求得最大和最小距离分别为 $2\sqrt{6}$ 和 $\sqrt{6}$。

第 9 章综合习题

6

证明. 令

$$f(x,y)=e^{x+y-2}-\frac{x^2+y^2}{4}$$

则

$$f(x,0)=e^{x-2}-\frac{x^2}{4}\geq 1+(x-2)+\frac{(x-2)^2}{2}-\frac{x^2}{4}=\frac{(x-2)^2}{4}\geq 0$$

同理 $f(0,y)\geq 0$。

当 $x,y>0$ 时，两边取对数，即证

$$x+y-2-\ln\frac{x^2+y^2}{4}\geq 0$$

令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，对于

$$g(r,\theta)=r\cos\theta+r\sin\theta-2-\ln\frac{r^2}{4}$$

我们有

$$\frac{\partial g}{\partial r}=\cos\theta+\sin\theta-\frac{2}{r}$$

因此对于任意给定 θ，$g(r,\theta)$ 关于 r 在 $(0,\frac{2}{\sin\theta+\cos\theta})$ 单减，$(\frac{2}{\sin\theta+\cos\theta},+\infty)$ 单增。于是

$$g(r,\theta)\geq g\left(\frac{2}{\sin\theta+\cos\theta},\theta\right)=-\ln\frac{r^2}{4}=\ln(\sin\theta+\cos\theta)\geq 0$$

□

14

在内部

$$\left.\begin{aligned}0=\frac{\partial f}{\partial x}=2x+y^2-1\\ 0=\frac{\partial f}{\partial y}=2xy\end{aligned}\right\}\Longrightarrow (x,y)=(0,\pm 1),\left(\frac{1}{2},0\right)$$

此时 z 可取 0 和 $-\frac{1}{4}$。

在边界

$$f(x,y)=x^2+x(2-x^2)-x=-x^3+x^2+x=g(x)$$

则

$$g'(x)=-3x^2+2x+1=-(3x+1)(x-1)$$

结合

$$g\left(-\sqrt{2}\right)=2+\sqrt{2}\qquad g\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{5}{27}\qquad g(1)=1\qquad g\left(\sqrt{2}\right)=2-\sqrt{2}$$

知 $f(x,y)$ 的最大值为 $2+\sqrt{2}$，最小值为 $-\frac{1}{4}$。

问题反馈

- 如果求的是某点处的全增量/偏导数/微分，最终要把该点代入；
- Taylor 展开时，如果在 (a,b) 展开，则项形如 $(x-a)^i(y-b)^j$ 而不是 x^iy^j；
- 展开到 n 项时，结果中不能有高于 n 的项；
- 极值点和边界上的最值点不要漏。
- 三个轴长不同的椭球，其内接正方体棱一定平行于坐标轴，此结论可以直接用。