第二周作业答案

于俊骜

2024 年 3 月 13 日

习题 8.3

1

(1)

是。
平面 Oxy 上椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 绕 x 轴旋转而成。

(2)

是。
平面 Oxy 上的圆 $x^2+y^2=1$ 绕 x 轴旋转而成。

(3)

不是。

(4)

是。
平面 Oxy 上的双曲线 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 绕 x 轴旋转而成。

(5)

不是。

(6)

是。
平面 Oxy 上的双曲线 $x^2-y^2=1$ 绕 x 轴旋转而成。

(7)

是。
平面 Oxz 上的抛物线 $4z = x^2$ 绕 z 轴旋转而成。

(8)

不是。

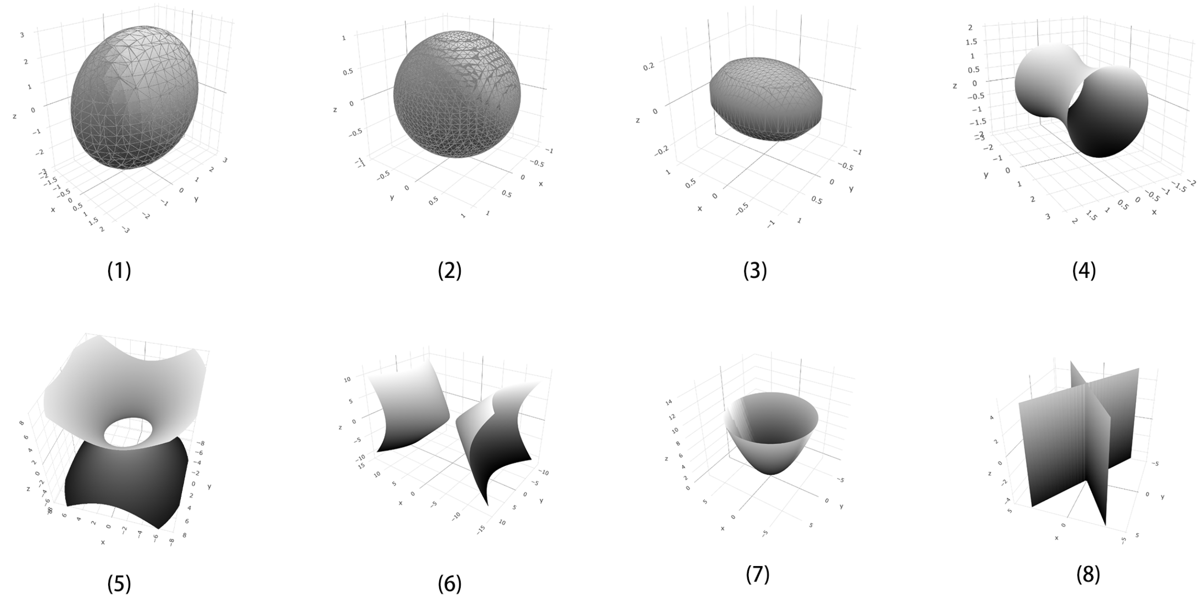

图 1: 第 1 题图

2

(1)

直线；平面。

(2)

直线；平面。

(3)

圆；圆柱面。

(4)

双曲线；双曲柱面。

(5)

抛物线；抛物柱面。

(6)

点；直线。

(7)

两个点；两条平行直线。

(8)

两个点；两条平行直线。

3

(1)

单叶双曲面，方程为

$$x^2+y^2-\frac{z^2}{4}=1$$

(2)

无名旋转曲面，方程为

$$y^2+z^2=\sin^2 x,\ x\in[0,\pi]$$

(3)

椭球面，方程为

$$4x^2+9y^2+9z^2=36$$

习题 8.4

1

令 $x'=x-1, y'=y-1, z'=z-\frac{1}{2}$，则

$$x'^2-y'^2-z'^2=\frac{3}{4}$$

这是一个双叶双曲面。

2

令 $x' = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, y' = \frac{x-y}{2}, z' = z$，则

$$\frac{1}{2}x'^2 - \frac{1}{2}y'^2 + \sqrt{2}y' + z' + 1 = 0$$

再令 $x'' = x, y'' = y' - \sqrt{2} + z' + 3$，则

$$x''^2 - y''^2 + z'' + 3 = 0$$

这是一个双曲抛物面。

4

(4)

令 $x = \rho\sin\theta\cos\varphi, y = \rho\sin\theta\sin\varphi, z = \rho\cos\theta$，则球面坐标系方程为

$$\rho^2(\sin^2\theta\cos 2\varphi - \cos^2\theta) = 1$$

(5)

令 $r = \sqrt{x^2+y^2}$，得到

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$$

再令 $x = \rho\sin\theta\cos\varphi, y = \rho\sin\theta\sin\varphi, z = \rho\cos\theta$，则球面坐标系方程为

$$\rho^2(1+\cos^2\theta) = 4$$

(6)

令 $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \varphi = \arctan\frac{y}{x}$，得到

$$x^2+y^2+z^2 = 2\left(1 + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) \Longrightarrow (x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2) = 4x^2$$

再令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，则柱面坐标系方程为

$$r^2 + z^2 = 4\cos^2\theta$$

(10)

令 $r = \sqrt{x^2+y^2}, \theta = \arctan\frac{y}{x}$，结合 $\cos\varphi \geq 0$，得到直角坐标系方程

$$z = x^2 - y^2$$

8

$$\begin{cases} x = x_0 + a\sin u\cos v \\ y = y_0 + a\sin u\sin v \qquad u\in[0,\pi],\ v\in[0,2\pi) \\ z = z_0 + a\cos u \end{cases}$$

9

$$\begin{cases} x = a\sin u\cos v \\ y = b\sin u\sin v \qquad u\in[0,\pi],\ v\in[0,2\pi) \\ z = c\cos u \end{cases}$$

11

$$\begin{cases} x = a\cosh u\cos v \\ y = b\cosh u\sin v \qquad u\in\mathbb{R},\ v\in[0,2\pi) \\ z = c\sinh u \end{cases}$$

习题 9.1

12

令 $u=x+y, v=\frac{y}{x}$，则 $x=\frac{u}{1+v}, y=\frac{uv}{1+v}$。于是

$$f(u,v)=\left(\frac{u}{1+v}\right)^2-\left(\frac{uv}{1+v}\right)^2=\frac{u^2(1-v)}{1+v}\Longrightarrow f(2,3)=-2$$

13

$$\begin{aligned} f\left(\varphi(x,y),\psi(x,y)\right) &= (x+y)^{x-y} \\ \varphi\left(f(x,y),\psi(x,y)\right) &= x^y+x-y \\ \psi\left(\varphi(x,y),f(x,y)\right) &= x+y-x^y \end{aligned}$$

14

(2)

存在。

事实上

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\frac{\sin xy}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\frac{\sin xy}{xy}\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}y=a$$

(7)

存在。

注意到，存在 $M>0$，使得

$$e^{x+y}\ge (x+y)^4\ge x^4+2x^2y^2+y^4,\ x+y>M$$

因此

$$0\le \lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}}(x^2+y^2)e^{x+y}\le \lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}}\frac{x^2+y^2}{(x+y)^4}\le \lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}}\frac{x^2+y^2}{x^4+2x^2y^2+y^4}=\lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}}\frac{1}{x^2+y^2}=0$$

(9)

存在。

事实上

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\sqrt{xy+1}+1\right)=2$$

(10)

不存在。

事实上，$y=0$ 时原式恒为 0。而取 $y=-x+x^2$，则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=-x+x^2}}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^3-x^2+1}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-1}{\sqrt{x^2-x+1}+1}=-\frac{1}{2}\ne 0$$

故极限不存在。

15

(1)

由

$$e^{\frac{1}{x^2-y^2}}=e^{\frac{1}{\rho^2\cos 2\varphi}}$$

知，极限存在当且仅当

$$\varphi\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right)$$

(2)

由

$$e^{x^2-y^2}\sin 2xy=e^{\rho^2\cos 2\varphi}\sin\left(\rho^2\sin 2\varphi\right)$$

知，极限存在当且仅当

$$\varphi\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right)\cup\{0,\pi,2\pi\}$$

17

(1)

$x_0 \neq y_0$ 时，(x_0, y_0) 处显然连续。

$x_0 = y_0 = 0$ 时，当 $y = 0$ 时函数值恒为 0。另一方面，取 $y = x - x^2$，则

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y = x - x^2}} \frac{xy}{x - y} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y = x - x^2}} \frac{x(x - x^2)}{x^2} = 1 \neq 0$$

故不连续。

$x_0 = y_0 \neq 0$ 时

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y = y_0}} \frac{xy}{x - y} = \lim_{x \to 0} \frac{xy_0}{x - y_0}$$

不存在。

18

证明. 注意到 $\cos\alpha = 0$ 时，$f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) = f(0, t) = 0$。

$\cos\alpha \neq 0$ 时，对于 $t \neq 0$ 有

$$f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) = \frac{t^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^4\cos^4\alpha + t^2\sin^2\alpha} = \frac{t\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^2\cos^4\alpha + \sin^2\alpha} \Longrightarrow \lim_{t \to 0} f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) = 0 = f(0,0)$$

另一方面，取 $y = x^2$，则

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y = x^2}} f(x, y) = \frac{1}{2} \neq 0$$

这说明 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 不连续。 □

问题反馈

- 习题 9.1 的 15(2) 几乎都漏情况；
- 曲面命名不规范，出现“抛物面、旋转椭球面”等；
- 遇到平方差时，尽量考虑双曲三角换元；
- 习题 9.1 的 17(1)，直线 $y = x$ 上的连续性并不相同，不能混为一谈；
- 均值不等式要求变量非负，否则不成立。