

# 第一周作业答案

于俊骞

2024年3月4日

## 习题 8.1

6

证明.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) - \frac{1}{2}(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2) = -\frac{3}{2}$$

□

9

(1)

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \sin^2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 3$$

(2)

$$|(3\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + 3\mathbf{b})|^2 = 100|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = 300$$

10

证明. 由对称性, 只需证一个等号. 事实上

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} \implies \mathbf{a} \times (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{0} \implies \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{0} \implies \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$$

□

12

证明.

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \sin^2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 (1 - \cos^2(\mathbf{a}, \mathbf{b})) = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$$

□

## 14

对于  $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = (4, -6, 12)$ , 我们有

$$|\mathbf{c}| = \sqrt{16 + 36 + 144} = 14$$

进而

$$\cos \alpha = \frac{(\mathbf{c}, \mathbf{i})}{|\mathbf{c}|} = \frac{2}{7} \quad \cos \beta = \frac{(\mathbf{c}, \mathbf{j})}{|\mathbf{c}|} = -\frac{3}{7} \quad \cos \gamma = \frac{(\mathbf{c}, \mathbf{k})}{|\mathbf{c}|} = \frac{6}{7}$$

## 17

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (1, 3, 4) \\ \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = (1, 3, 4) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$$

即  $A, B, C$  共线。

## 23

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} |(2, -2, -3) \times (4, 0, 6)| = \frac{1}{2} |(-12, -24, 8)| = 14$$

## 26

由

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

知共面。

## 习题 8.2

### 1

#### (1)

如图, 该平面与三个坐标轴夹角相同。

#### (2)

如图, 该平面与  $x$  轴垂直。

#### (3)

如图, 该平面与  $z$  轴垂直。

(4)

如图，该平面与  $Oyz$  平面平行。

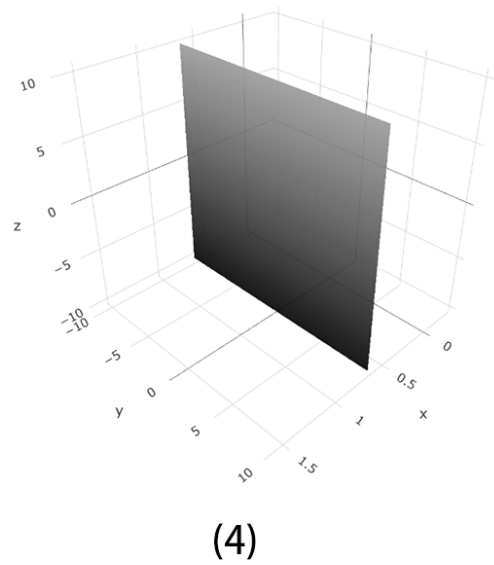
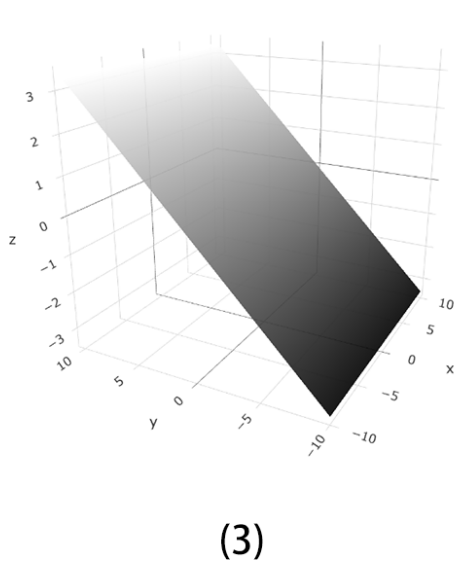
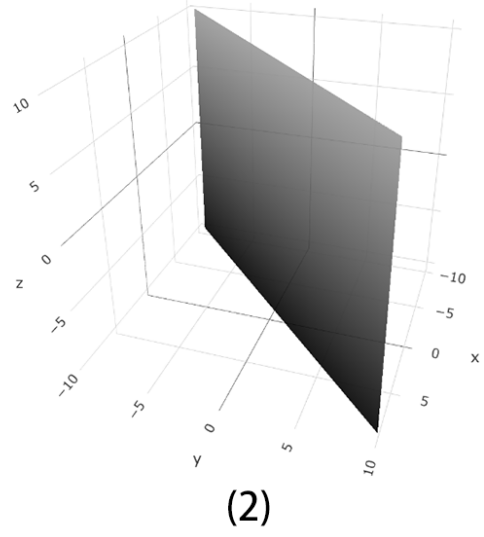
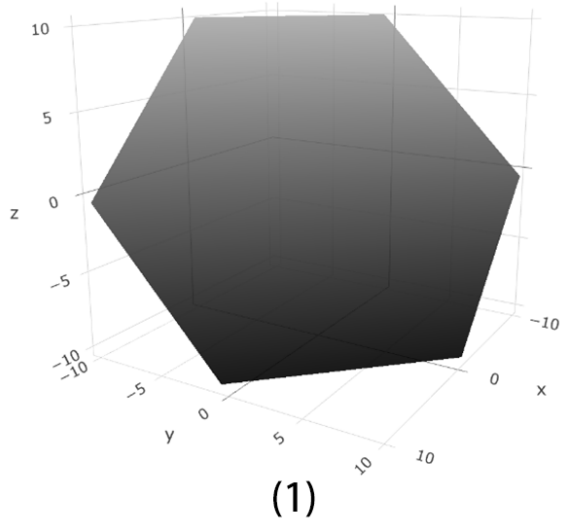


图 1: 第 1 题图

2

设平面方程为  $ax + by + cz + d = 0$ , 则

$$\begin{cases} 2a - b + 3c + d = 0 \\ 3a + b + 2c + d = 0 \\ 3a - b + 4c = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a + c = 0 \\ b = c \\ d = 0 \end{cases}$$

于是所求平面的方程为

$$x - y - z = 0$$

3

由题, 该平面的一个法向量为  $(1, 1, 1)$ , 因此可设平面方程为  $x + y + z + d = 0$ , 带入  $(5, -7, 9)$  得  $d = -2$ 。因此所求平面的方程为

$$x + y + z - 2 = 0$$

6

不难得到平面方程为

$$x = -5$$

7

(1)

由题, 法向量为  $\mathbf{n}_1 = (2, -1, 1), \mathbf{n}_2 = (1, 1, 2)$ , 因此

$$\theta = \arccos \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

(2)

由题, 法向量为  $\mathbf{n}_1 = (2, 1, 2), \mathbf{n}_2 = (3, -4, 0)$ , 因此

$$\theta = \arccos \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \arccos \frac{2}{15}$$

14

(1)

由题, 该平面有法向量  $\overrightarrow{AB} = (1, -3, 1)$ , 因此, 可设方程为  $x - 3y + z + d = 0$ 。再带入  $A, B$  中点  $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{7}{2})$ , 得到

$$2x - 6y + 2z - 7 = 0$$

15

(1)

两平面的法向量为  $\mathbf{n}_1 = (1, 0, 2), \mathbf{n}_2 = (0, 1, -3)$ , 则

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = (-2, 3, 1)$$

因此直线方程为

$$(x, y, z) = (0, 2, 4) + t(-2, 3, 1)$$

16

截得题中直线的两平面的法向量为  $\mathbf{n}_1 = (2, 3, -1), \mathbf{n}_2 = (3, -5, 2)$ , 则

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = (1, -7, -19)$$

为其方向向量。进一步, 可求得直线上一点  $(1, 0, -2)$ 。因此, 其参数方程为

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -7t \\ z = -2 - 19t \end{cases}$$

18

(1)

两条直线的方向向量分别为

$$\mathbf{a} = (5, -3, 3) \times (3, -2, 1) = (3, 4, -1)$$

$$\mathbf{b} = (2, 2, -1) \times (3, 8, 1) = (10, -5, 10)$$

因此夹角为

$$\theta = \arccos \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{\pi}{2}$$

19

(1)

错题。

20

(2)

两条直线的方向向量分别为

$$\mathbf{a} = (4, 1, -3) \times (0, 0, 1) = (1, -4, 0)$$

$$\mathbf{b} = (1, 1, 0) \times (1, 0, 0) = (0, 0, -1)$$

得到  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ , 因此垂直。

进一步, 联立四个方程知, 存在交点  $(-2, -1, 5)$ 。

## 21

(1)

直线的方向向量为

$$\mathbf{a} = (3, -2, 0) \times (3, 0, -1) = (2, 3, 6)$$

平面的法向量为  $\mathbf{n} = (6, 15, -10)$ , 因此夹角为

$$\varphi = \arcsin \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{a}|} = \arcsin \frac{3}{7}$$

## 22

(1)

由题, 直线的方向向量为  $\mathbf{a} = (1, 2, -1)$ 。取直线上的点  $P(0, 1, 0)$ , 则线段  $PP_0$  在直线上的投影长度为

$$\left| \frac{\overrightarrow{PP_0} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \right| = 0$$

因此  $PP_0$  就是垂线段, 长度为  $|\overrightarrow{PP_0}| = \sqrt{3}$ 。

## 23

(1)

两直线的方向向量分别为  $\mathbf{a} = (4, -3, 1)$ ,  $\mathbf{b} = (-2, 9, 2)$ 。分别取两直线上一点  $A(9, -2, 0)$ ,  $B(0, -7, 2)$ , 由

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \overrightarrow{AB} = 245 \neq 0$$

知两直线异面。

因此, 两直线距离为

$$d = \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \overrightarrow{AB}|}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} = 7$$

## 29

由题, 可设所求点为  $(6a, 2a, -9a)$ , 将它与原点连线的中点坐标代入平面方程, 解得  $a = -2$ 。因此所求对称点为  $(-12, -4, 18)$ 。

## 30

设所求点的坐标为  $(a, b, c)$ ，将它与  $(1, 2, 3)$  连线的中点坐标代入直线方程，得到

$$b = -3a + 3 \quad c = -2a + 1$$

直线的方向向量为  $(1, -3, -2)$ ，故进一步地有

$$0 = (1, -3, -2) \cdot ((a, b, c) - (1, 2, 3)) = 14a \implies a = 0$$

因此所求对称点为  $(0, 3, 1)$ 。

## 问题反馈

- 表示角不要用角度制，统一写弧度制；
- 尽量写分数不写小数，否则易混；
- 叉乘、行列式计算错得较多；
- 选特殊点的时候尽量选些简单的点；
- 如果可以的话，直线方程的系数尽量化为整数；
- 三角形面积要除以 2。